معادلات حرکت سونامی در توصیف لاگرانــژی

آرش قهـرمان[۱]

۱- عضو هیات علمی دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار

چکیده

چکیده: در بررسی دینامیک سیالات، معمولا به یک نقطه از فضا توجه می‌شود و همان نقطه مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما از نقطه نظر لاگرانژی، یعنی در توصیف لاگرانژی در مقابل توصیف اویلری، تمرکز بر روی یک ذره خاص از سیال است و حرکت این ذره است که مورد بررسی قرار می‌گیرد. در چنین حالتی مکان اولیه ذره، (a,b,c)، و زمان، t، متغیرهای مستقل هستند. مکان نهایی ذره، $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ و فشار، $\hat{p}$، تابعی از (a,b,c,t) هستند. در این مقاله با بیان معادلات پایه، معادلات حرکت یک سونامی را بدست آورده و آن را با نتایج قبلی مقایسه می‌کنیم.

کلیدواژه: سونامی، توصیف لاگرانژی، معادله حرکت، دینامیک سیالات

[1] Corresponding author
E-mail address: ghahraman@cmu.ac.ir
Postal Address:Iran, Chabahar Maritime University

۱. توصیف لاگرانژی سونامی‌ها

استفاده از توصیف لاگرانژی در دینامیک سیالات هم مزایا و هم معایبی و محدودیت‌هایی دارد. این توصیف برای تحلیل حرکت سیالاتی با تغییر شکل بزرگ مناسب نیست؛ چراکه اگر شکست مـوج رخ دهـد مکـان $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ توابعی گسسته خواهند بود. بعلاوه این توصیف در تحلیل سیالات لزج (چسبناک) نیز مفید نیسـت؛ چراکـه وارد کردن جملات مربوط به ویسکوزیته در لاگرانژی باعث پیچیده‌تر شدن آن خواهد شد. با ایـن وجـود، اسـتفاده از مختصه‌های لاگرانژی در تحلیل پیشروی و اوج‌گیری امواج بلند[1] مفید است. در این حالت مزیت استفاده از ایـن توصیف عبارتست از: ۱) دنبال کردن جبهه موج آسان است. مثلا اگر خط ساحلی را در $a=\cdot$ در نظر گرفتـه و از شکست موج صرف‌نظر کنیم، مکان جبهه موج همواره با $\hat{x}(\cdot,b,c,t)$ تعیین می‌شود. ۲) شرایط مرزی در بسـتر و سطح آزاد بطور خودبخودی برآورده می‌شود. ۳) اثرات غیرخطی بودن معادلات نیز در تحلیـل مسـئله وارد مـی-شود.[2] در این مقاله ابتدا معادله موج غیرخطی مربوط به امواج آب کم‌عمق[3] در توصیف لاگرانژی را بدست آورده و سپس مشخصه‌های یک موج بلند را با استفاده از این توصیف بررسی می‌کنیم.

۲. معادله موج غیرخطی امواج آب کم‌عمق

۲-۱ معادلات پایه

یک ذره از سیال را بصورت حجم dV در زمان t درنظر مـی‌گیـریم. مختصـات ایـن ذره در دسـتگاه دکـارتی بـا $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ بیـان مـی‌شـود. بنـابراین $dV=d\hat{x}\,d\hat{y}\,d\hat{z}$ اسـت. اگـر مکـان وحجـم اولیـه ایـن ذره را بترتیـب با (a,b,c) و dV_o نمایش دهیم، آنگاه

$$dV=d\hat{x}\,d\hat{y}\,d\hat{z}=J\,da\,db\,dc \qquad (1)$$

که در آن $J=\dfrac{\partial(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial(a,b,c)}$ است. برای سیالات تراکم‌ناپذیـر، معادله پیوستگی ایجـاب مـی‌کنـد کـه $dV=dV_o$ باشد. بنابراین معادله پیوستگی در توصیف لاگرانژی بصورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial(\hat{x},\hat{y},\hat{z})}{\partial(a,b,c)}=۱ \qquad (2)$$

و معادله حرکت برای یک سیال تراکم‌ناپذیر و لزج بصورت زیر بیان می‌شود

---

[1] Long-wave Run-up

[2] حتی هنگامی‌که خطی‌سازی انجام می‌شود بازهم اثرات غیرخطی قابل مشاهده است.

[3] Shallow water

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_a & \hat{y}_a & \hat{z}_a \\ \hat{x}_b & \hat{y}_b & \hat{z}_b \\ \hat{x}_c & \hat{y}_c & \hat{z}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{tt} \\ \hat{y}_{tt} \\ \hat{z}_{tt} + g \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \hat{p}_a \\ \hat{p}_b \\ \hat{p}_c \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

که در آن g شتاب گرانش و ρ چگالی است. اندیس‌های c,b,a و t بترتیب به معنی مشتق‌گیری نسبت به c,b,a و t است.

$$\frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\hat{p},\hat{y},\hat{z})}{\partial(a,b,c)} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\hat{x},\hat{p},\hat{z})}{\partial(a,b,c)} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial t^2} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\hat{x},\hat{y},\hat{p})}{\partial(a,b,c)} = 0 \tag{6}$$

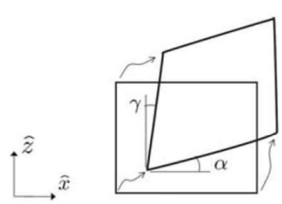
بعلاوه برای حفظ قوانین بقای جرم و تکانه، المان غیرچرخشی سیال را در صفحه عمودی فرض می‌کنیم.[1] شکل (۱)

در شکل (۱) زوایای α و γ عبارتند از

$$\tan(\alpha) = \frac{\hat{z}_a}{\hat{x}_a}, \tan(\gamma) = \frac{\hat{x}_c}{\hat{z}_c}$$

و اگر $\tan(\alpha) = \tan(\gamma)$ باشد، المان سیال غیرچرخشی خواهد بود. بنابراین شرط غیرچرخشی بودن المان در صفحه $x-z$، نیز بطورمشابه در صفحه $y-z$ ، بصورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial a}\frac{\partial \hat{x}}{\partial c} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial a}\frac{\partial \hat{z}}{\partial c} \tag{7}$$



شکل۱. تغییر شکل المان سیال

[1] زیرا از نیروی اصطکاک صرف نظر کرده‌ایم.

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial b}\frac{\partial \hat{y}}{\partial c}=\frac{\partial \hat{z}}{\partial b}\frac{\partial \hat{z}}{\partial c} \qquad (8)$$

بیان شرایط مرزی در توصیف لاگرانژی نیز ساده‌است. از شرط مرزی بستر می‌توان بصورت حرکت ذره سـیال در بستر و در راستای آن تعبیر کرد. بنابراین ذره‌ای که در $\hat{z}=-h$ است، شرط $\hat{z}=-h(\hat{x},\hat{y})$، برآورده می‌سـازد. در مورد سونامی معمولا h را بصورت تابعی از زمان نیز درنظر می‌گیرند. بنابراین شرط مرزی در بسـتر بصـورت زیر خواهد بود

$$\hat{z}=-h(\hat{x},\hat{y},t)\,\mathrm{on}\,c=-h(z,b,t_o) \qquad (9)$$

شرط سینماتیکی در سطح آب ایجاب می‌کند که ذره‌ای که در سطح آب است مکـان خـود را حفـظ کـرده و در سطح باقی بماند. در نتیجه ارتفاع سطح آب با مولفه $\hat{z}$ ذره‌ای که روی سطح است مشخص مـی‌شـود. از طرفـی شرط دینامیکی ایجاب می‌کند که فشار در همان مکان صفر باشد. اگر سطح اولیه آب را در $c=۰$، و ارتفـاع آب را η فرض کنیم، آنگاه شرایط دینامیکی و سینماتیکی سطح آب را می‌توان اینگونه بیان کرد

$$\hat{z}=\eta \quad \text{on} \quad c=۰ \qquad (10)$$

$$\hat{p}=۰ \quad \text{on} \quad \hat{z}=\eta(\text{i.e. } c=۰) \qquad (11)$$

۲-۲ فرض موج بلند و مقیاس‌بندی[1]

طول موج مربوط به سونامی‌ها بزرگ است و گاهی به چند صد کیلومتر مـی‌رسـد، درحالیکـه عمـق آب تنهـا از مرتبه چند کیلومتر است. بنابراین دور از واقعیت نیست اگر مقیاس طول افقی بزرگتر از مقیـاس طـول عمـودی باشد. به این فرض اطلاحا فرض موج بلند می‌گویند. دراینجا دو پارامتر $\mathfrak{L}$ و $\mathfrak{D}$، بترتیب درراستای افقی و عمودی، را معرفی می‌کنیم و متغیرهای بدون بعد زیر را می‌سازیم

$$A=\frac{a}{\mathfrak{L}} \quad B=\frac{b}{\mathfrak{L}} \quad C=\frac{c}{\mathfrak{D}} \quad T=\frac{\sqrt{g\mathfrak{D}}}{\mathfrak{L}}t$$
$$\hat{X}=\frac{\hat{x}}{\mathfrak{L}} \quad \hat{Y}=\frac{\hat{y}}{\mathfrak{L}} \quad \hat{Z}=\frac{\hat{z}}{\mathfrak{D}} \quad \hat{P}=\frac{\hat{p}}{\rho g\mathfrak{D}}$$

با جایگزینی این متغیرها در معادلات (۲)، (۴)-(۶) و (۷)-(۸)، به معادلات زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})}{\partial(A,B,C)}=۱ \qquad (12)$$

[1] scaling

$$\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial T^2}+\frac{\partial\left(\hat{P},\hat{Y},\hat{Z}\right)}{\partial\left(A,B,C\right)}=0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial T^2}+\frac{\partial\left(\hat{X},\hat{P},\hat{Z}\right)}{\partial\left(A,B,C\right)}=0 \qquad (14)$$

$$\kappa\frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial T^2}+1+\frac{\partial\left(\hat{X},\hat{Y},\hat{P}\right)}{\partial\left(A,B,C\right)}=0 \qquad \kappa=\left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{L}}\right)^2 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial A}\frac{\partial \hat{X}}{\partial C}=\kappa\frac{\partial \hat{Z}}{\partial A}\frac{\partial \hat{Z}}{\partial C} \qquad (16)$$

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial B}\frac{\partial \hat{Y}}{\partial C}=\kappa\frac{\partial \hat{Z}}{\partial B}\frac{\partial \hat{Z}}{\partial C} \qquad (17)$$

ازآنجاکه در فرض موج بلند، $\kappa \ll 1$ است، جمله اول در (۱۵) و سمت راست معادلات (۱۶) و (۱۷) صفر می‌شوند. در نتیجه معادله حرکت در راستای z را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$g+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\hat{x},\hat{y},\hat{p}\right)}{\partial\left(a,b,c\right)}=0 \quad \text{یا} \quad 1+\frac{\partial\left(\hat{X},\hat{Y},\hat{P}\right)}{\partial\left(A,B,C\right)}=0 \qquad (18)$$

از طرف دیگر معادله (۱۶) بصورت $\hat{X}_A\hat{X}_C=0$ در می‌آید. این بدان معنی است که یا $\hat{X}_A=0$ است یا $\hat{X}_C=0$. عبارت اول، یعنی $\hat{X}_A=0$ از نظر فیزیکی بی‌معناست؛ چراکه تعبیر آن اینست که ذرات سیال در ابتدا در نقاط مختلفی بوده‌اند و در زمان‌های بعدی همگی یک نقطه را اشغال کرده‌اند. بنابراین عبارت دوم، $\hat{X}_C=0$، را انتخاب می‌کنیم. بطور مشابه $\hat{Y}_C=0$ را بر می‌گزینیم. در نتیجه

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial c}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \hat{X}}{\partial C}=0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial c}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \hat{Y}}{\partial C}=0 \qquad (20)$$

این معادلات بیان می‌کنند که توزیع سرعت در راستای عمودی یکنواخت است.

۲-۳ معادله پیوستگی

از (۲) و (۱۹)- (۲۰) می‌توان رابطه زیر را بدست آورد

$$s=\frac{\partial(\hat{x},\hat{y})}{\partial(a,b)}\quad \text{و} \quad \frac{\partial\hat{z}}{\partial c}=\frac{1}{s} \tag{21}$$ [1]

و چون $\frac{1}{s}$ تابعی از c نیست می‌توان براحتی از معادله(۲۱) انتگرال گرفـت. در نتیجـه $\hat{z}=\frac{c}{s}+\text{constant}$ بدسـت می‌آید. ثابت انتگرال‌گیری را نیز می‌توان بکمک شرط مرزی در بستر تعیین کرد

$$\hat{z}=\frac{c+h(a,b,t_o)}{s}-h(\hat{x},\hat{y},t) \tag{22}$$

و از شرط مرزی در سطح آب، معادله (۱۰)، می‌توان عبارت زیر را به عنوان معادله پیوستگی در نظریه مـوج آب کم‌عمق نتیجه گرفت

$$\eta=\frac{h(a,b,t_o)}{s}-h(\hat{x},\hat{y},t) \tag{23}$$

معادله فوق تعبیر واضحی برمبنای بقای جرم دارد. از آنجاکه $\hat{x}_c=\hat{y}_c=0$، ستون عمودی آب تکیه‌گـاهی نـدارد اما بصورت عمودی باقی می‌ماند. اگـر (۲۳) را بصـورت $\left(h(\hat{x},\hat{y},t)+\eta\right)s\,\Delta a\Delta b=h(a,b,t_o)\Delta a\Delta b$ بازنویسی کنیم، سمت راست به معنی حجم اولیه ستون آب و سمت چپ حجم ستون آب در لحظـه t را نشـان می‌دهد.

۲-۴ معادله حرکت

مشابه آنچه در بدست آمودن (۲۱) انجام شد، می‌توان عبارت زیر را از (۱۸) استنتاج کرد

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\hat{p}}{\rho g}\right)=-\frac{1}{s} \tag{24}$$

از طرفی از معادلات (۲۱) و (۲۴) داریم

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\hat{z}+\frac{\hat{p}}{\rho g}\right)=0$$

بنابراین $\hat{z}+\frac{\hat{p}}{\rho g}$ تنها تابعی از b,a و t است. اکنون با اعمال شرط مرزی دینـامیکی در سـطح آب، معادلـه (۱۱)، خواهیم داشت

$$\hat{z}+\frac{\hat{p}}{\rho g}=\eta \tag{25}$$

یعنی فشار، یک فشار هیدرواستاتیکی است. بعلاوه از (۱۰) و (۲۴) داریم

[1] دقت کنید که $\hat{x}$ و $\hat{y}$ تابعی از c نیستند.

$$\frac{\hat{p}}{\rho g}=-\frac{c}{s} \qquad (26)$$

و از معادلات (۲۰)، (۲۱)، (۲۴) و (۲۵)، جمله دوم معادله (۴) را بصورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$\frac{\partial\left(\frac{\hat{p}}{\rho},\hat{y},\hat{z}\right)}{\partial(a,b,c)}=\frac{g}{s}\frac{\partial(\hat{\eta},\hat{y})}{\partial(a,b)}$$

در نهایت معادله حرکت در راستای x بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$\frac{\partial^۲\hat{x}}{\partial t^۲}+\frac{g}{s}\frac{\partial(\eta,\hat{y})}{\partial(a,b)}=۰ \qquad (27)$$

و بطور مشابه برای راستای y داریم

$$\frac{\partial^۲\hat{y}}{\partial t^۲}+\frac{g}{s}\frac{\partial(\hat{x},\eta)}{\partial(a,b)}=۰ \qquad (28)$$

۲-۵ جداسازی متغیرها

در اینجا سعی داریم تا با استفاده از روش جداسازی متغیرها[1] معادلات (۲۱)، (۲۳)، (۲۷) و (۲۸) را خطی‌سازی کنیم. برای این منظور از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم

$$\hat{x}=a+x$$
$$\hat{y}=b+y \qquad (29)$$

که x و y جابجایی ذره سیال از مکان اولیه‌اش را نشان می‌دهند. با جایگذاری در معادلات غیرخطی فوق خواهیم داشت

$$\frac{\partial^۲x}{\partial t^۲}+\frac{g}{s}\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}+\frac{\partial(\eta,y)}{\partial(a,b)}\right]=۰ \qquad (30)$$

$$\frac{\partial^۲y}{\partial t^۲}+\frac{g}{s}\left[\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial(x,\eta)}{\partial(a,b)}\right]=۰ \qquad (31)$$

$$\eta-\frac{h(a,b,t_o)}{s}+h(a+x,b+y,t)=۰ \qquad (32)$$

$$s=۱+\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \qquad (33)$$

[1] Separation of Variables

این مجموعه از معادلات با معادلات Goto و Shuto معادل است. اب این حال معادله پیوستگی تفاوت دارد[۱].
اگر فرض کنیم که جابجایی ذره کوچک است، بالاترین مرتبه متناظر با y, x و η حذف شده و معادلات موج آب کم‌عمق بدست می‌آید.

۳. انتشار یک بعدی موج در بستر افقی

معادلات حاکم بر مسئله یک بعدی را می‌توان با توجه به معادلات (۳۰)، (۳۲) و (۳۳) بصورت زیر نوشت

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{g}{s}\frac{\partial \eta}{\partial a}=0 \qquad (34)$$

$$\eta-\frac{h\left(a,t_o\right)}{s}+h\left(a+x,t\right)=0 \qquad (35)$$

$$s=1+\frac{\partial x}{\partial a} \qquad (36)$$

حال اگر بستر را بصورت افقی، ثابت = h، درنظر بگیریم، از (۳۵) و (۳۶) داریم

$$\eta_a=-\frac{hs_a}{s^2}, \qquad s_a=x_{aa}$$

و باجایگذاری در (۳۴) خواهیم داشت

$$x_{tt}-\frac{gh}{s^3}x_{aa}=0 \qquad (37)$$

دستگاه معادلات خطی‌سازی شده نیز بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+g\frac{\partial \eta}{\partial a}=0 \qquad (38)$$

$$\eta-h\left(a,t_o\right)\left(1-\frac{\partial x}{\partial a}\right)+h\left(a+x,t\right)=0 \qquad (39)$$

در نتیجه

$$x_{tt}-gh\,x_{aa}=0 \qquad (40)$$

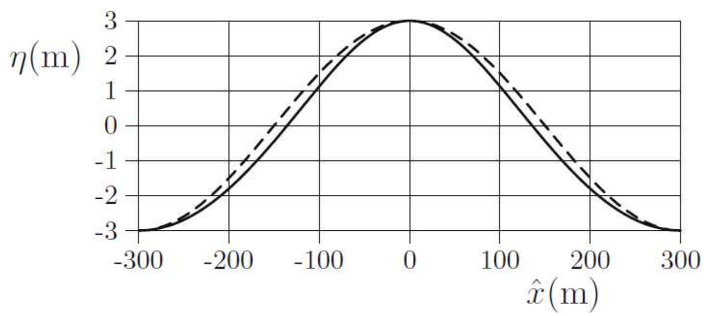
جواب دقیق معادله (۴۰) بصورت $x=A\,e^{ik(a\pm c_o t)}$است، که در آن $c_o=\sqrt{gh}$، A و k ضرایب ثابت هستند. با جایگذاری در (۳۹) می‌توان شکل موج را بدست آورد. مجموعه معادلات مربوط به یک موج پیشرونده عبارتند از

[۱] در معادلات Goto و Shuto برخی از جملات غیرخطی، بخاطر اینکه جابجایی ذره سیال را کوچک درنظر گرفته‌اند، حذف شده است.

$$\eta = \frac{H}{2}\cos\left(ka - \sigma t\right) \qquad (41)$$

$$\hat{x} = a - \frac{H}{2kh}\sin\left(ka - \sigma t\right) \qquad (42)$$

که $\sigma = kc_o$. در شکل (۲)، شکل موج حاصل ازمعادلات فوق، با ارتفاع موج $H = 6\mathrm{m}$، عمق آب $h = 20\mathrm{m}$، طـول موج $L\left(=\frac{2\pi}{k}\right) = 600\mathrm{m}$ و $t = 0$ را نشان داده شده است.



شکل۲. نقطه‌چین مربوط به نظریه Airy با شکل موج $\cos\left(k\hat{x} - \sigma t\right)$ و خط ممتد از معادلات، با ارتفاع موج $H = 6\mathrm{m}$، عمق آب $h = 20\mathrm{m}$، طول موج $L\left(=\frac{2\pi}{k}\right) = 600\mathrm{m}$ و $t = 0$

نظریه لاگرانژی بطور واضح قله تیزتری را نشان می‌دهد که ریشه آن در اثرات غیرخطی اسـت؛ یعنــی علـی‌رغـم اینکه معادلات خطی‌سازی شده‌اند بازهم اثرات غیرخطی بودن سیستم در قله تیز خـود را نشـان داده اسـت. بـا انتقال معادله (۴۹) به دستگاه دکارتی می‌توان نشان داد که جواب خطی‌شده در توصیف لاگرانژی، مشـابه مـوج Stokes، شامل مولفه نیم طول موج است و به همین دلیل غیرخطی بودن بطور جزیی در جـواب خطــی ظـاهر می‌شود. با این حال، سطح میانگین آب[1] صفر نمی‌شود.[2] اگر معادله (۴۲) با معادله (۳۵) جابجت شود، شکل موج موج تقریبی زیر بدست می‌آید

$$\eta \approx \frac{H}{2}\left[\cos\left(k\hat{x} - \sigma t\right) + \frac{H}{2h}\cos\left(2\left(k\hat{x} - \sigma t\right)\right)\right]$$

[1] Average Water Level

[2] البته اگرچه میانگین فضایی سطح آب صفر نیست اما ارتفاع میانگین ذره در سطح آب صفر است.

در نتیجه ناسازگاری فوق نیز با این جابجایی برطرف می‌شود.[1] درمقایسه با (۴۰)، سرعت موج معادلـه غیرخطـی (۳۷) برابرست با $c \approx \sqrt{gh}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\eta}{h}\right)$ ، که مشابه عبارت سرعت برای امواج آب کـم‌عمـق در مختصـات دکـارتی است. از آنجاکه سرعت فاز قله بیشتر از قسمت‌های دیگر آنست، قله نسبت به مرکز بیشتر به جلـو حرکـت مـی-کند. شکل‌های (۳) و (۴) مقایسه‌ای از انتشار امواج سینوسی، در بستر افقی، را بـا دو مـدل خطـی و غیرخطـی نشان می‌دهند.[2] جواب خطی تغییریدر موج سینوسی نشان نمی‌دهد اما در جواب غیرخطی قله سریع‌تر و گودی موج کندتراز قسمت‌های دیگر حرکت می‌کنند. بعلاوه میزان بالا آمدن قله و گودی موج در مدل غیرخطی بیشتر است، شکل (۳)، علت آن نیز آنست که میانگین ارتفاع سطح آب بوسیله جمله غیرخطی صفر می‌شود.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی یک بعدی مشخصه‌های امواج بلند، بطور خاص سونامی، در توصیف لاگرانژی پـرداختیم. این توصیف اگرچه دارای محدوده کاربردی وسیع نیست اما درتحلیل حرکت امواجی مانند سـونامی‌هـا مزایـایی دارد. در اینجا نشان دادیم که نتایج بدست آمده از این توصیف در انتشـار یـک بعـدی در بسـتر افقـی بـا نتـایج دستگاه دکارتی مطابقت دارد و بعلاوه اثرات غیرخطی را نیز شامل می‌شود که با نتایج نظریه غیرخطی، مبنی بـر حرکت سریع‌تر قله نسبت به سایر قسمت‌های موج، هم‌خوانی دارد.

منابع

[1] Shuto N, Goto C (1978) Numerical simulation of tsunami runup. Coastal Engineering in Japan, JSCE, 21:13-20

[2] Goto C (1979) Nonlinear equation of long waves in the Lagrangian description. Coastal Engineering in Japan, JSCE, 22:1-9

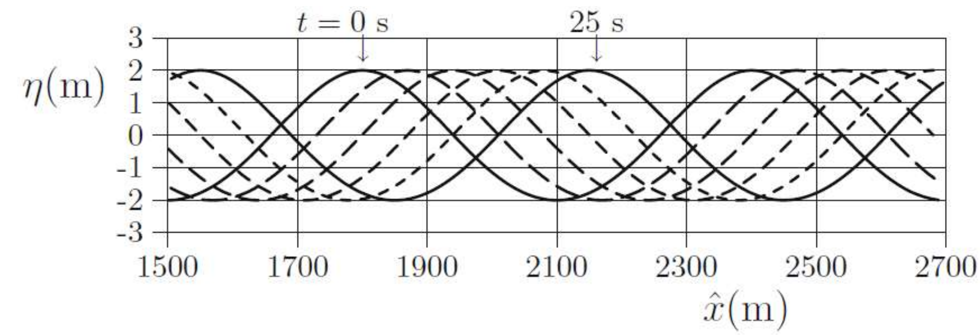
[3] Goto C, Shuto N (1980) Runup of tsunamis by linear and nonlinear theories. Proc. 17th ICCE, ASCE:695-707

[4] Kundu A., Tsunami and Nonlinear Waves, Springer, p.191, 2006

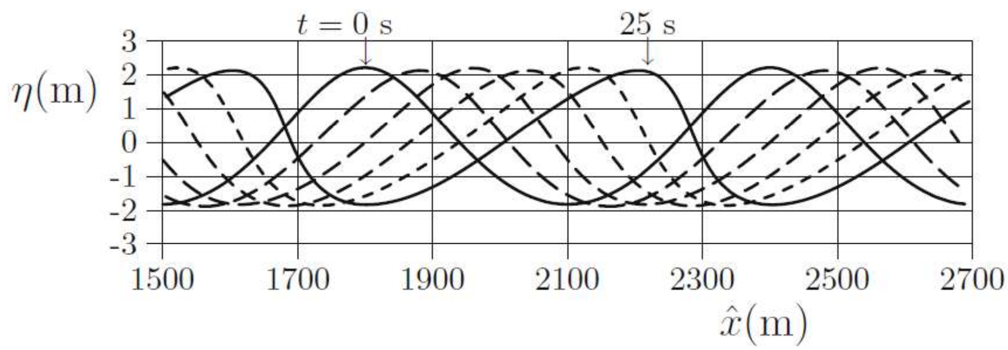
---

[1] توجه داشته باشید که معادله بالا وجود جواب سینوسی ایستا برای موج آب کم‌عمق را پیشنهاد نمی‌کند بلکه تنها وقتی x با معادله (۴۲) توصیف شود یک شکل موج آنی را نشان می‌دهد.

[2] درهر دومورد از معادله (۴۲) برای محاسبات عددی استفاده شده است.



شکل۳. شکل موج سینوسی منتشر شده در بستر افقی براساس مدل خطی $(H = ۴\,\mathrm{m}, h = ۲۰\,\mathrm{m}, L = ۶۰۰\,\mathrm{m})$ **در لحظات** $t = ۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵$



شکل۴. شکل موج سینوسی منتشر شده در بستر افقی براساس مدل غیرخطی $(H = ۴\,\mathrm{m}, h = ۲۰\,\mathrm{m}, L = ۶۰۰\,\mathrm{m})$ **در لحظات** $t = ۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵$