

# مطالعه مولفه غیرخطی و پاشندگی در انتشار امواج سالیتهوری در معادله KdV

آرش قهرمان<sup>۱</sup>

دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، دانشکده علوم دریایی

## چکیده

ویژگی‌های غیرخطی بودن موج و مشخصه‌های پاشندگی محیط در تشکیل امواج سالیتهوری باعث پایداری این امواج شده و به آنها این امکان را می‌دهد تا مسافت‌های زیاد را طی نمایند. تعادل بین مولفه غیرخطی و پاشندگی در این دسته از امواج ویژگی‌های خاصی به آن می‌دهد. در این مقاله ضمن بررسی معادله KdV در تولید امواج سالیتهوری از نقطه نظر ریاضی-فیزیک، مشخصه‌های غیرخطی، پاشندگی محیط و نقش هر یک در تولید امواج سالیتهوری مطالعه شده‌اند. در اینجا با بررسی جواب پایدار معادله KdV، یک پتانسیل موثر را برای معادله مورد نظر بدست آورده و براساس آن نشان می‌دهیم که معادله KdV نمی‌تواند جواب‌هایی با دامنه منفی داشته باشد.

**کلیدواژه:** سالیتهون، موج سالیتهوری، معادله KdV، تسونامی، پاشندگی، آشوب

---

<sup>1</sup> Corresponding author

E-mail address: ghahraman@cmu.ac.ir

Postal Address: Chabahar Maritime University- University Ave. 9971756499, Iran

## مقدمه

قرن نوزدهم و نیمه اول قرن بیستم را می‌توان به عنوان دوران غلبه فیزیک خطی دانست، که با معادلات ماکسول شروع شده و با مکانیک کوانتومی، بر مبنای پیکربندی اصل برهم‌نهی، به اوج خود رسید. ابزار ریاضی معمول در فیزیک نظیر تبدیل فوری، نظریه کنش خطی<sup>۱</sup> و بسط اختلالی<sup>۲</sup> بطور ذاتی خطی بودند. البته فیزیکدانان به اهمیت پدیده‌های غیرخطی توجه داشته‌اند؛ اما در بسیاری از این موارد به کمک روش‌های تقریبی سعی می‌کردند تا غیرخطی بودن را بصورت یک اختلال در نظریه خطی بیان کرده و بدین ترتیب از رویارویی با آن دوری کنند.

این نوع نگرش در ۴۰ سال گذشته بطور چشمگیری تغییر کرده‌است. به تدریج اهمیت تحلیل ذاتی پدیده‌های غیرخطی درک شده بود و به سمت دو مفهوم اترکتور غیر متجانس<sup>۳</sup> و سالیتون<sup>۴</sup>، که ایده‌های گذشته را دگرگون می‌کرد هدایت شد. این مفاهیم به مشخصه‌های غیرعادی پدیده‌های غیرخطی مربوط می‌شوند و به نظر می‌رسد که یکدیگر را نقض می‌کنند. اترکتور غیر متجانس به مفهوم آشوب در یک سیستم مربوط است و در سیستم‌هایی که تعداد درجات آزادی‌شان کوچک است و می‌توان آنها را بصورت ساده در نظر گرفت، این مفهوم نیز ظاهر می‌شود. درحالی‌که سالیتون‌ها در سیستم‌هایی با درجات آزادی بالا دیده می‌شوند و حتی سیستم می‌تواند رفتاری بسیار پیچیده از خود نشان دهد (J.E.Castillo Hernandez, 2010).

سالیتون یک موج سالیتری، یعنی یک موج جایگزیده در فضا است و ویژگی‌های پایدار عجیبی را بروز می‌دهد. از اولین مشاهده سالیتون (J.E.Castillo Hernandez, 2010) در سال ۱۸۳۴، توسط راسل<sup>۵</sup>، این موضوع جذابیت‌ها، علاقه‌مندی‌ها و مناقشات زیادی را برانگیخته است. تا سال ۱۸۹۵ که کورت و ج<sup>۶</sup> و دوریس<sup>۷</sup> توانستند معادله‌ای برای توصیف سالیتون ارائه دهند، کار شایان توجهی در این زمینه انجام نشد. وجود سالیتون‌ها در توصیف پدیده‌هایی نظیر انتشار امواج هیدرودینامیکی، بررسی امواج داخلی اقیانوسی، امواج سطحی در نزدیکی سواحل، امواج ناشی از زمین‌لرزه‌ها در بستر اقیانوس، امواج جایگزیده در پلاسماها، انتشار سیگنال در تارهای نوری و ... لازم و ضروری است. جنبه قابل توجه سالیتون‌ها در مانایی غیرعادی آنها در مواجهه با اختلال نهفته است. در واقع یک عامل موثر در مطالعه سالیتون‌ها وجود فشارهای بزرگ و غیرقابل پیش‌بینی وارد شده به دکل‌ها و تجهیزات نفتی بود که در دریاها ساخته شده

<sup>1</sup> Linear Response Theory

<sup>2</sup> Perturbative Expansion

<sup>3</sup> Strange Attractor

<sup>4</sup> Soliton

<sup>5</sup> John Scott Rusell

<sup>6</sup> Kortewege

<sup>7</sup> de Vries

بودند. درک نظری مشاهده راسل تا ۱۸۹۵ به تاخیر افتاد، تا اینکه مطالعه کورت‌وج و دِ وریس<sup>۱</sup> به معادله‌ای منجر شد که امروزه به نام این دو نفر مشهور است (به‌طور اختصار آنرا معادله KdV می‌نامند). با این وجود، معادله KdV شکل دقیقی از مطالعات جوزف ولنتاین<sup>۲</sup> (۱۸۲۴-۱۹۲۹) بود (Synolakis, 1987; Miles, 1980). معادله KdV، یکی از اولین نمونه معادلات مربوط به نظریه سالیتون و امواج سالیتوری است؛ چراکه این معادله ویژگی‌های ریاضی برجسته‌ای دارد و مطالعه آن ما را به سمت درک مفاهیم نهفته در ایده‌های اصلی و پایه‌ای در نظریه سالیتون هدایت می‌کند.

### مشاهدات تجربی

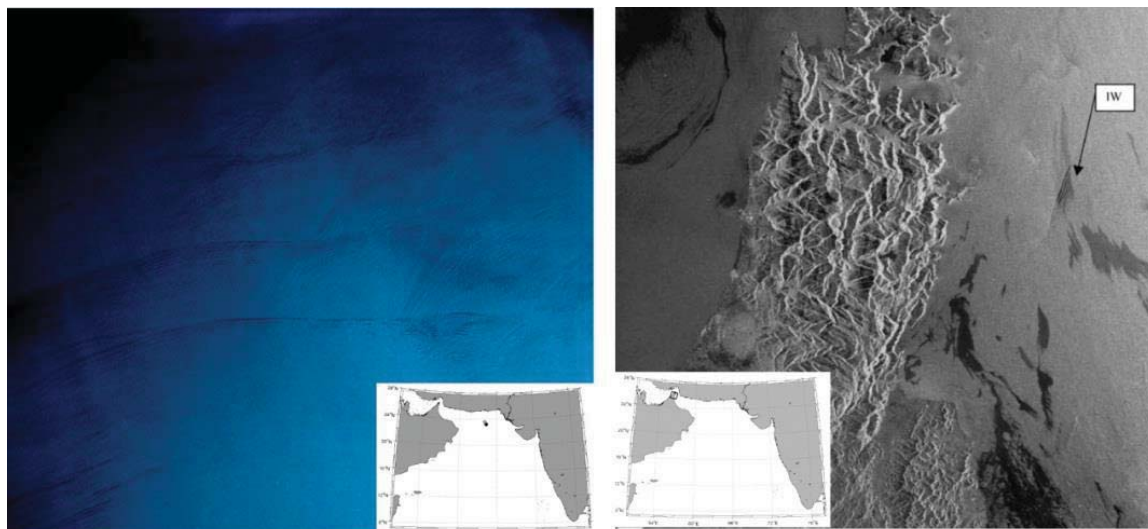
در بسیاری از کاربردهای امواج آب کم‌عمق به کارگیری معادلات کامل اویلر بسیار پیچیده بوده و معمولاً از مدل‌های تقریبی برای توصیف پدیده‌ها استفاده می‌شود. شناخته‌شده‌ترین معادلات آب کم‌عمق معادلات بوسینسک و KdV هستند. معادلات KdV نقش محوری در توسعه نظریه امواج سالیتوری و تبدیلات پراکندگی معکوس<sup>۳</sup> دارد (Small, 2002). نظریه موج آب کم عمق این امکان را فراهم می‌کند که به طور موثر و مناسب امواج درون کانال، امواج سطحی در نزدیکی سواحل و امواج داخلی اقیانوسی را مدل‌سازی کنیم. به دلیل وقوع گسترده امواج داخلی در اقیانوس، امواج سالیتوری و بسته موج سالیتوری (سالیتون) برای اقیانوس‌شناسان بسیار جذاب و مهم است. همچنین امواج دوره‌ای نویدال نیز در مهندسی سواحل و بررسی اثر خوردگی ساحل، انتقال جرم، برهمکنش موج با اسکله و سازه‌های ساحلی و نظایر آن مورد توجه است (Small, 2002).

در ۵۴ ناحیه از جهان وقوع امواج داخلی اقیانوسی و امواج سالیتوری مشاهده شده است. در بیشتر این نواحی علائم ایجاد و انتشار موج با تصاویر ماهواره تایید شده است؛ اما در برخی نواحی مطالعات موردی نظیر طول موج، توزیع فضایی سالیتون‌ها، سرعت و هر متغیر موثر در شبیه‌سازی‌ها نیز صورت گرفته است. شکل (۱-الف) وجود یک بسته موج سالیتوری را نشان می‌دهد که به سمت شمال غرب در حرکت است (Small, 2002; Synolakis, 1987). شکل (۱-ب) علائم چندین بسته موج سالیتوری را نشان می‌دهد (Small, 2002; Synolakis, 1987). جدول (۱) پارامترهای مختلف معادله KdV در دریای عمان را نشان می‌دهد (Synolakis, 1987).

<sup>1</sup> Korteweg and de Vries

<sup>2</sup> Joseph Valentine de Boussinesq

<sup>3</sup> Inverse scattering transform



ب

الف

شکل ۱- الف) تصویر SAR از دریای عمان در ۳ اکتبر ۱۹۹۹ و فضای تصویر  $100\text{ km} \times 100\text{ km}$  است. ب) تصویر ماهواره‌ای از دریای عمان در ۷ مه ۱۹۸۹ و فضای تصویر نامشخص است.

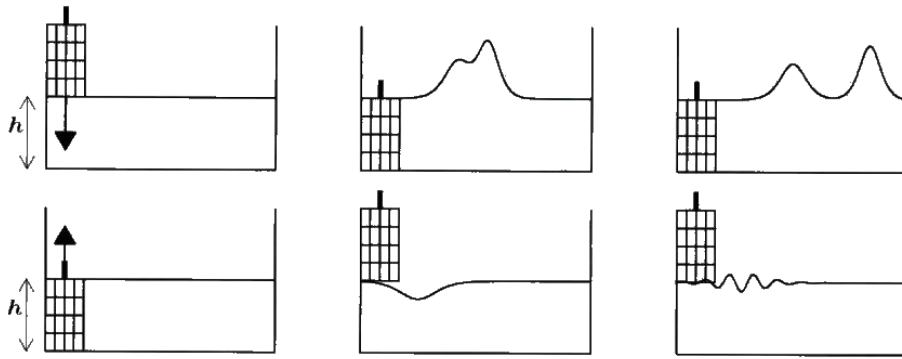
جدول ۱- پارامترهای KdV در دریای عمان (اکتبر ۲۰۰۲) (Synolakis, 1987).

محیط	مدل KdV
$h_1 = 40\text{ m}$ $\rho_1 = 1024.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\alpha = -0.1\text{ s}^{-1}$ $c = 0.82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$h_2 = 60\text{ m}$ $\rho_2 = 1027.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\gamma = 328 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ $v_{\max} = 0.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\alpha$  ضریب غیرخطی بودن و  $\gamma$  ضریب پاشندگی است. استفاده از روش‌های و حل‌کننده‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر این امواج و تحلیل نتایج، صرف نظر از ارتباط فیزیکی آنها، شناخت و آگاهی ما از موج سالیتهوری یا موج نویدال و رفتار آنها را بهبود می‌بخشد. بیان یک توصیف تقریبی از سیستم فیزیکی براساس معادلات سالیتهوری مناسب و در نظر گرفتن اختلال‌های ممکن در جواب سالیتهوری دقیق، بجای ایجاد یک تقریب خطی و سپس تلاش برای وارد کردن جملات غیرخطی به عنوان اختلال، بسیار موثرتر است (miles, 1980; Dogan Kaya, 2002).

شکل ۲ تصویر یک مخزن آزمایشی<sup>۱</sup> را نشان می‌دهد. امواج با حرکت یک پیستون در یک انتهای مخزن، بوجود می‌آیند. بسته به دامنه آن، اختلال اولیه می‌تواند یک یا چند موج سالیتهوری ایجاد کند.

<sup>۱</sup> مخزن‌های آزمایشی (یا کانال موج) برای شبیه‌سازی امواج مورد استفاده قرار می‌گیرند



شکل ۲- نمایش یک مخزن آزمایشی که برای تولید موج در آزمایشگاه استفاده می شود.

امواج غیرخطی، سرعتی بیشتر از سرعت  $c_0 = \sqrt{gh}$  امواج خطی با طول موج بالا دارند. این انحراف از سرعت  $c_0$  با ارتفاع موج،  $\eta$ ، متناسب است، بطوریکه سرعت امواج از رابطه  $v = c_0(1 + A\eta)$  بدست می آید که در آن  $A$  یک ضریب ثابت است. هیچ موج سالیتموری با دامنه منفی وجود ندارد. یعنی این امواج بصورت یک قله جایگزیده<sup>۱</sup> حرکت خواهند کرد. سالیتمونهای هیدرودینامیکی، ساختار دینامیکی دارند. آنها با سرعت و شکل ثابت حرکت می کنند ولی نمی توانند ساکن باشند.

### توصیف معادله KdV

معادله اوپلر برای شارهای تراکم ناپذیر و غیرچسبنده، با شرایط مرزی در بستر و سطح، با فرض غیرچرخشی بودن شار به معادله KdV می انجامد.

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $c_0 = \sqrt{gh}$  ارتفاع سطح بالای سطح تعادل و  $h$  عمق شار است. با تغییر متغیر  $T = t$  و  $X = x - c_0 t$  خواهیم داشت

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{3}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} = 0 \quad (2)$$

نهایتاً با اعمال متغیرهای بدون بُعد  $\phi = \frac{\eta}{h}$ ،  $\zeta = \frac{X}{X_0}$  و  $\tau = \frac{T}{T_0}$ ، به فرم استاندارد زیر می رسیم

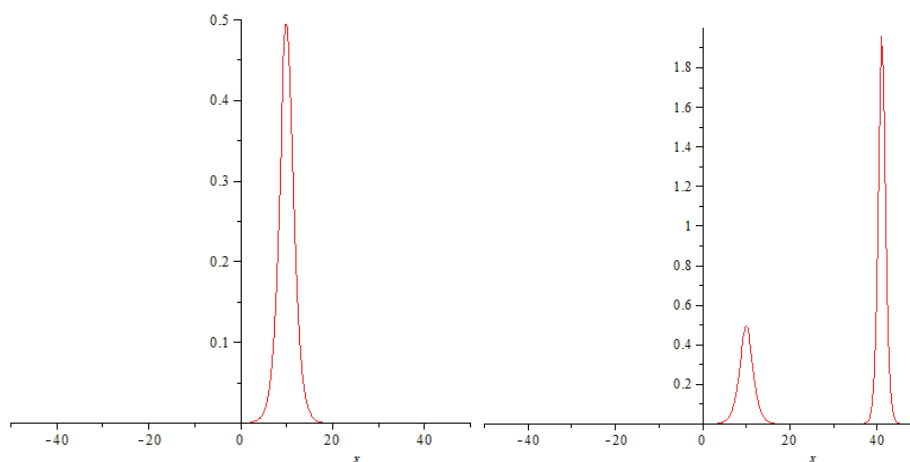
<sup>1</sup> Localized pits

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (3)$$

از جمله جواب‌های معادله KdV می‌توان به جواب

$$\phi = A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{A}{2}} (\zeta - 2A\tau) \right); \quad (A > 0) \quad (4)$$

اشاره کرد که از نظر فضایی جایگزیده است. وجود جواب، شرط  $A > 0$  را ایجاب می‌کند. پهنای سالیتهون،  $L = \sqrt{\frac{2}{A}}$ ، با افزایش دامنه، کاهش می‌یابد (شکل (۳)).



شکل ۳- نمایش تابع موج معادله (۴) به ازای مقادیر مختلف A

### ویژگی معادله KdV و جواب‌های آن

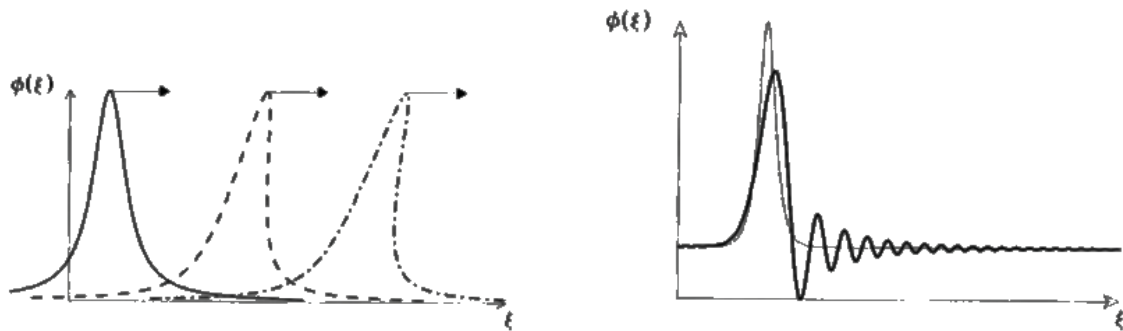
معادله KdV در بسیاری از زمینه‌های فیزیک، هنگامیکه امواج می‌توانند در یک محیط غیرخطی ضعیف و پاشنده انتشار یابند، به چشم می‌خورد. ابتدا نقش فیزیکی عبارتهای مختلف این معادله را بررسی می‌کنیم.

عبارت غیرخطی  $\phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)$  در معادله (۳) در جهت ایجاد و تقویت موج ضربه‌ای<sup>۱</sup> است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = 0 \quad (5)$$

معادله (۵) به معادله Burgers-Hopf معروف است (J.E.Castillo Hernandez, 2010).

<sup>1</sup> Shock wave



شکل ۵- تحول زمانی جواب معادله Burgers-Hopf و تحول یک پالس مشابه هنگامیکه دینامیک آن با معادله (۶) بیان می‌شود.

از مقایسه معادله (۳) و (۵)، می‌توان ضریب  $\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$  را به عنوان سرعت انتشار امواج در نظر گرفت. بطوریکه در تقریب مرتبه اول، هر مولفه از موج با سرعت  $\phi$  حرکت می‌کند. به عنوان یک نتیجه مستقیم از این مقایسه می‌توان دریافت که قسمت‌هایی از سیگنال که دامنه  $\phi$  بزرگتری دارند با سرعت بیشتری نسبت به نقاط دیگر حرکت می‌کنند. اکنون عبارت خطی شده معادله (۳) را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (6)$$

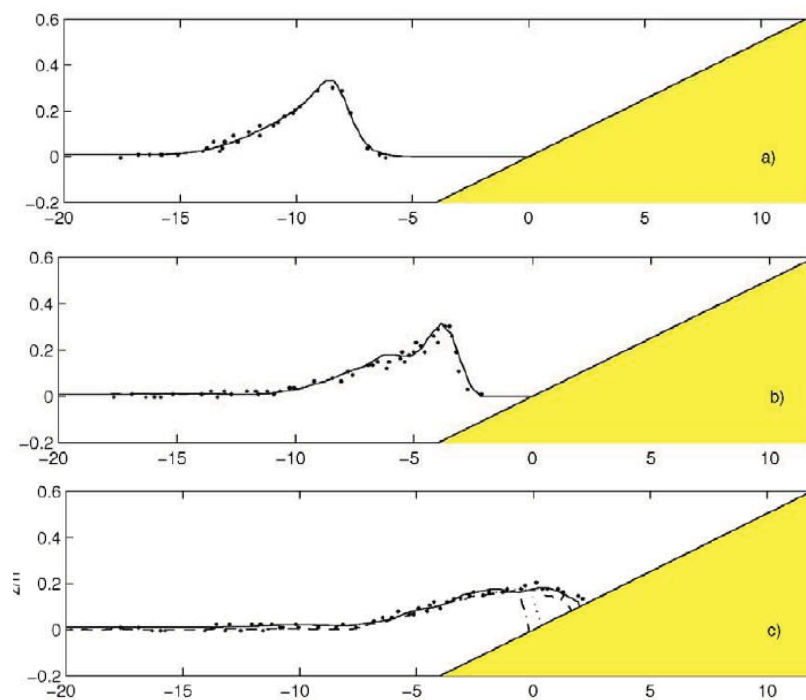
این معادله جواب‌های موج تخت  $\phi = Ae^{i(q\zeta - \omega\tau)}$  دارد، که فرکانس  $\omega$  و عدد موج  $q$  در رابطه پاشندگی  $\omega = -q^3$  صدق می‌کند. دقت کنید که معادله KdV در چارچوب متحرک، با سرعت  $c_0$ ، نوشته شده است. از معادله (۲) در دستگاه آزمایشگاه نیز می‌توان به رابطه پاشندگی معمول‌تری رسید

$$\omega' = c_0 q' \left( 1 - \frac{q'^2 h^2}{6} \right)$$

امواج با سرعت فاز  $v_\phi = \frac{\omega}{q}$  حرکت می‌کنند که به عدد موج  $q$  بستگی دارد که توصیف یک محیط پاشنده است. در چنین محیطی مولفه‌های فوریه یک موج با سرعت‌های متفاوتی منتشر می‌شوند، که به سمت پهن‌شدگی موج می‌رود.<sup>۱</sup> وجود جواب سالیتمونی در معادله KdV از تعادل بین دو اثر غیرخطی

۱ برای پیش‌بینی رفتار امواج اقیانوسی (William Pierson) مشابه روش ویلیام پیرسون

بودن و پاشندگی نتیجه می‌شود. غیرخطی بودن موج را به سمت جایگزیده شدن می‌برد، درحالی‌که پاشندگی باعث پهن شدن موج می‌شود. توجه به این نکته که تعادل پایدار است، اهمیت بسزایی دارد. اگر موج اولیه بیش از حد باریک شود، اثرات پاشندگی چیره می‌شود و موج تا زمانی که به تعادل برسد پهن خواهد شد. بالعکس، اگر شرایط اولیه باعث پهن شدن بیش از حد شود، غیرخطی بودن بر پاشندگی برتری می‌یابد و سالیتهون به سمت جایگزیدگی می‌رود تا تعادل برقرار گردد. باوجود این، مواردی هم وجود دارد که در اثر اختلالات خارجی تعادل برقرار نمی‌شود. این موارد هنگامی بوجود می‌آیند که عمق موج، در جهت انتشار آن بطور پیوسته، کاهش می‌یابد، مانند حالتی که امواج دریا به سمت آب‌های کم عمق پیشروی می‌کنند. عبارت پاشندگی، که در معادله (۱) با  $h^2$  متناسب است، بطور پیوسته کاهش می‌یابد درحالی‌که عبارت غیرخطی، که با  $\frac{1}{h}$  متناسب است، افزایش می‌یابد. از آنجاکه غیرخطی بودن حاکم است موج سرازیر شده و سرانجام می‌شکند، همانند امواج کنار ساحل<sup>۱</sup> (شکل ۵)).



شکل ۵- تحول زمانی موج سالیتهوری. نقاط مشخص شده در شکل، نتایج تجربی (miles, 1980) را نشان می‌دهند. درحالی‌که منحنی از شبیه‌سازی عددی بدست آمده است (A.A. Soliman, 2009; miles, 1980; Dogan Kaya, 2002).

<sup>1</sup> مثال امواج ساحل تا حدی افراطی است چراکه اختلال بصورت سیستماتیک در همه جهات بطور یکسان عمل می‌کند و سرانجام سالیتهون را از بین می‌برد. این غیر معمول است چون سالیتهون‌ها در حالت کلی در مواجهه با اختلال پایدار است.



این پایداری استثنایی سالیتون‌ها است که وسعت و تنوع کاربرد آن را نشان می‌دهد و حتی کاربردهای فیزیکی آن نیز بطور تقریبی با معادلات سالیتون دقیق نظیر معادله KdV توصیف می‌شود. معادله KdV نیز، مانند تمام معادلات غیرخطی، جواب‌های گوناگونی دارد. در اینجا برخی از جواب‌ها، که اهمیت خاصی دارند، را بررسی می‌کنیم.

### جواب‌های پایدار

این دسته از جواب‌ها شکل خود را حفظ کرده و با سرعت  $v$  منتشر می‌شوند. بنابراین می‌توان آنها را به صورت  $\phi(\zeta, \tau) = \phi(\zeta - v\tau)$  نوشت. با تغییر متغیر  $Z = \zeta - v\tau$  در معادله (۳)، خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= \frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -v \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} &= \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial \zeta^3} &= \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -v \phi_z + 6\phi\phi_z + \phi_{zzz} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dz} (-v\phi + 3\phi^2 + \phi_{zz}) = 0 \quad (8)$$

بنابراین

$$\phi_{zz} + 3\phi^2 - v\phi + C_1 = 0 \quad (9)$$

که  $C_1$  ثابت انتگرال‌گیری است. طرفین (۹) را در  $\phi_z$  ضرب کرده و مجدداً انتگرال می‌گیریم

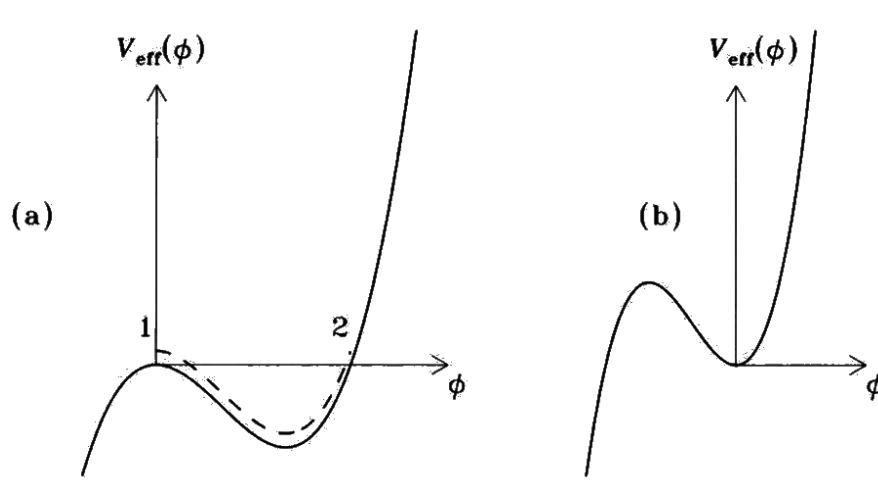
$$\phi_z \phi_{zz} + 3\phi_z \phi^2 - v\phi_z \phi + \phi_z C_1 = 0$$

$$\int (\phi_z \phi_{zz} + 3\phi_z \phi^2 - v\phi_z \phi + \phi_z C_1) dz = \frac{1}{2} \phi_z^2 + \phi^3 - \frac{1}{2} v \phi^2 + C_1 \phi = C_2$$

$$\frac{1}{2} \phi_z^2 + \phi^3 - \frac{1}{2} v \phi^2 + C_1 \phi = C_2 \quad (10)$$

$C_2$  نیز ثابت انتگرال گیری است. این معادله مشابه معادله‌ای است که بقای انرژی را برای یک ذره به جرم واحد بیان می‌کند. مکان آن با  $\phi$  و زمان با  $z$  متناظر است. با توجه به معادله (۱۰) می‌توان یک تابع پتانسیل مؤثر به صورت زیر معرفی کرد.

$$V_{eff}(\phi) = \phi^3 - \frac{1}{2}v\phi^2 + C_1\phi \quad (11)$$



شکل ۶- شکل پتانسیل مؤثر  $V_{eff}(\phi)$  به ازای (الف)  $v > 0$  و (ب)  $v < 0$

با معرفی این پتانسیل، معادله (۱۰) به فرم زیر در خواهد آمد

$$\frac{1}{2}\phi_z^2 + V_{eff}(\phi) = C_2 \quad (12)$$

این روش از این بابت اهمیت دارد که با معرفی یک شبه پتانسیل<sup>۱</sup>، این اجازه را می‌دهد تا از تجربیات مکانیک برای تعیین سرعت  $v$  و حدود ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  استفاده کنیم.

### جواب سالیتمونی

جواب سالیتمونی که در بالا معرفی شد، یک جواب جایگزیده فضایی است؛ به این معنی که سه میدان  $\phi$ ،  $\phi_z$  و  $\phi_{zz}$  هنگامیکه  $|z|$  به بی‌نهایت میل می‌کند باید صفر شوند. در نتیجه ثابت‌های انتگرال گیری باید صفر اختیار شوند. بنابراین معادله (۱۰) به معادله زیر تقلیل می‌یابد

<sup>1</sup> Pseudo-Potential

$$\frac{1}{2}\phi_z^2 + \phi^3 - \frac{1}{2}v\phi^2 = 0 \quad (13)$$

ذره ساکنی را در نظر بگیرید که در زمان اولیه ( $z \rightarrow -\infty$ )، مکان  $\phi = 0$  را ترک می‌کند. در شکل (۵ الف) در نقطه ① قرار دارد. مطابق معادله (۱۰)، این ذره باید با یک شبه-انرژی ثابت حرکت کند. اگر ذره مبداء را در جهت منفی ترک کند، به پایین پتانسیل سقوط می‌کند درحالیکه انرژی جنبشی آن به سرعت افزایش یافته و  $\phi$  واگرا خواهد شد. از طرفی به دنبال جواب‌های مقید هستیم، پس به تناقض می‌رسیم. این تحلیل تایید می‌کند که معادله KdV جواب‌های جایگزیده با دامنه  $\phi$  منفی ندارد. بالعکس، اگر ذره مبداء را در جهت مثبت ترک کند، به نقطه ② خواهد رسید و سرعت آن دوباره صفر می‌شود. سپس به نقطه ① باز می‌گردد (که این حرکت به مدت بی‌نهایت طول خواهد کشید). این نوع رفتار با افزایش و سپس کاهش  $\phi$  در جواب سالیتمونی معادله KdV متناظر است.

$$\phi_z = \frac{d\phi}{dz} = \sqrt{v\phi^2 - 2\phi^3} \quad \frac{1}{2}\phi_z^2 = \frac{1}{2}v\phi^2 - \phi^3$$

$$dz = \frac{d\phi}{\sqrt{v\phi^2 - 2\phi^3}} \quad (14)$$

و با تغییر متغیر  $\phi = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2(u)$ ، جواب زیر را بدست می‌آوریم

$$\phi = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{v}{4}}z\right) \quad (15)$$

مقدار  $\phi$  در نقطه ② بیشترین مقدار دامنه،  $A = \frac{v}{2}$ ، را مشخص می‌کند. اگر  $v < 0$  انتخاب شود، می‌توان دید که احتمال داشتن حرکت مقید با انرژی ثابت برای ذره‌ای که از حالت سکون از مکان  $\phi = 0$  شروع به حرکت می‌کند، وجود ندارد (شکل ۵ ب). این رفتار متفاوت به ازای  $v > 0$  و  $v < 0$  را نباید به عنوان شکست تقارن در دو راستای  $+x$  و  $-x$  تلقی کرد و آنرا یک حالت غیرفیزیکی دانست. باید توجه داشت که، همانطور که اشاره کردیم، معادله KdV در چارچوب متحرک نوشته شده‌است. اختلاف بین  $v > 0$  و  $v < 0$  به این معناست که سالیتمون‌های هیدرولیکی همیشه فراصوتی<sup>۱</sup> هستند.

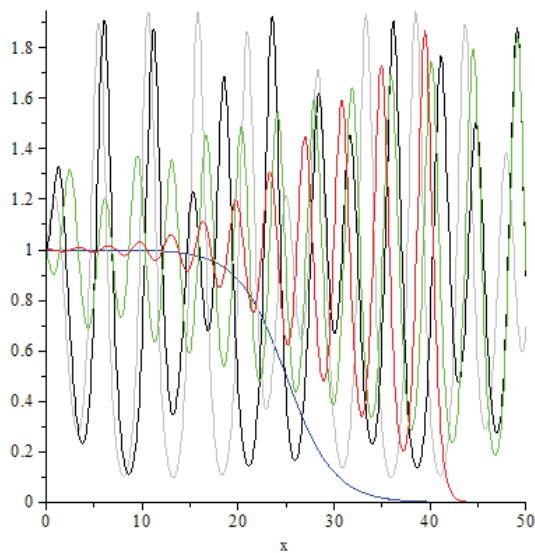
<sup>1</sup> Supersonic

### حل عددی معادله KdV

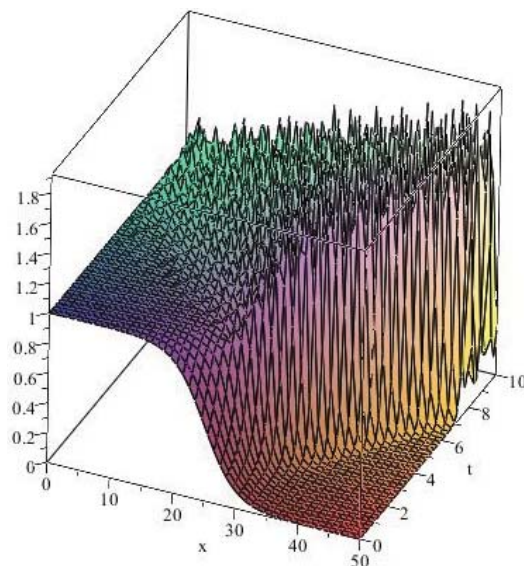
در اینجا معادله دیفرانسیل جزئی (۶) را بصورت عددی شبیه‌سازی کرده‌ایم. برای این منظور شرط اولیه بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\phi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \tanh\left(\frac{x-25}{5}\right) \right]$$

شکل ۷ نتایج بدست آمده از حل عددی معادله KdV را به ازای مقادیر  $\Delta x = 0.4$  و  $\Delta t = 0.1$  نشان می‌دهد. شکل (۷-ب) تحول موج را به ترتیب در زمان‌های  $t = 0, 5, 10, 30, 50$  نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مطابق تحلیل فوق، جواب‌های عددی نیز دامنه منفی برای جواب معادله KdV را نشان نمی‌دهند.



(ب)



(الف)

شکل ۷- شبیه‌سازی تحول زمانی-فضایی معادله KdV با به ازای  $\Delta x = 0.4$  و  $\Delta t = 0.1$ . (الف) نمایش تغییرات زمانی و مکانی معادله (۳) در بازه زمان  $0 \leq t \leq 50$ . (ب) تغییرات مکانی معادله (۳) در زمانهای  $t = 0, 5, 10, 30, 50$  ثانیه

### نتیجه‌گیری

در بسیاری از کاربردهای امواج آب کم‌عمق به کارگیری معادلات کامل اوپلر بسیار پیچیده بوده و معمولاً از مدل‌های تقریبی برای توصیف پدیده‌ها استفاده می‌شود. شناخته‌شده‌ترین معادلات آب کم‌عمق معادلات بوسینسک و KdV هستند. در این مقاله با مطالعه معادله KdV نشان دادیم که اثرات غیرخطی موج و پاشندگی محیط چگونه در ایجاد امواج سالیتری و پایداری شکل موج نقش داشته و مشخصه‌های ذره-گونه موج را حفظ می‌کنند. بنابراین می‌توان به سالیتون‌ها به عنوان ذرات مکانیکی نگاه کرد. همچنین در بررسی

معادله KdV پتانسیل موثر (۱۱) را معرفی کردیم. با توجه به پتانسیل موثر و پایدار بودن شکل موج، می-توان از اطلاعات و تجربیات مکانیک کلاسیک در بررسی و تحلیل رفتار امواج سالیتری استفاده کرد. بر این اساس نشان دادیم که معادله KdV نمی‌تواند جواب‌های جایگزیده با دامنه منفی داشته باشد.

## منابع

- A.A. Soliman, A. A. K. R., 2009. Numerical solution for the KdV equation based on similarity reductions. *Journal of Applied Mathematical Modelling*, Volume 33, pp. 1107-1116.
- Dogan Kaya, M. A., 2002. An application for a generalized KdV equation by the decomposition method. *Physics Letters A*, Volume 299, pp. 201-206.
- J.E.Castillo Hernandez, A. H. S., 2010. Exact solution for a nonlinear model. *Journal of Applied Mathematics and computation*, Volume 217, pp. 1646-1651.
- miles, J. W., 1980. The Korteweg-de Vries equation: a historical essay. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 106, pp. 131-47.
- Seadawy, A., 2011. New exact solutions for the KdV equation with higher order nonlinearity by using the variational method. *Journal of Computer and Mathematics with Applications*, Volume 62, pp. 3741-3755.
- Small, J. a. J. M., 2002. The generation of non-linear internal waves in the Gulf of Oman. *Continental Shelf Research*, 22(8), pp. 1153-1182.
- Synolakis, C. E., 1987. The runoff of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 185, pp. 523-45..
- Zheng, Q. V. K. X.-H. Y. a. Z. W., 1998. Observations of ocean internal waves in Arabian Sea using space shuttle photography. *EOS Trans*, 79(1:os3).