

# مقایسه عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود برای آرایه های یکنواخت خطی در مخابرات آکوستیکی زیر آب

محمود پاداش\*<sup>۱</sup>، هنگامه کشاورز<sup>۱</sup>، جواد احمدی شکوه<sup>۱</sup>، فرحناز مهنا<sup>۱</sup>، عبدالشکور

ریگی تمندانی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده ی مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان

کد مقاله: ۱۰۱۵

---

## چکیده

آرایه های خطی یکنواخت<sup>۱</sup> ساده ترین شکل هندسی ممکن است که آرایه ای از سنسورهای یکسان (در این مقاله هایدروفون<sup>۲</sup> ها) را می توان به صورت خطی و با فاصله ای یکسان از هم دیگر قرار داد. در این مقاله، مقایسه ای بر روی عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود<sup>۳</sup>، برای آرایه ای خطی و یکنواخت متشکل از هایدروفون ها در کاربردهای مخابرات زیر آب صورت می گیرد. نتایج این مقایسه نشان می دهد که الگوریتم MUSIC دارای تفکیک پذیری بهتری در مقایسه با سایر الگوریتم ها می باشد.

**کلمات کلیدی:** تخمین جهت ورود، آرایه های خطی یکنواخت، هایدروفون های اسکالر و برداری

---

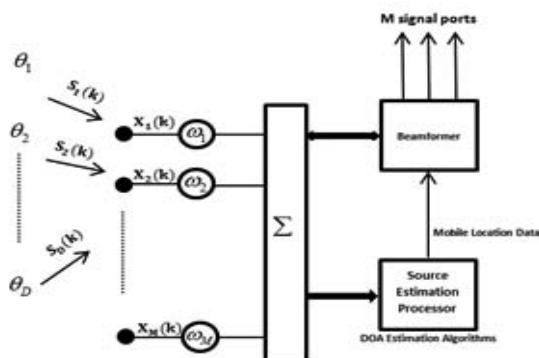
1-Uniform Linear Arrays (ULA)

2-Hydrophone

3-Direction Of Arrival (DOA) Estimation Algorithms

## مقدمه

آرایه های خطی یکنواخت متشکل از هایدروفون های اسکالر و برداری، ساده ترین و متداولترین آرایش هندسی ممکن می باشند که با به کار بردن الگوریتم های تخمین جهت ورود، جهت سیگنال وارده به آرایه توسط آنها تخمین زده می شود. شکل ۱، نمای کلی از این آرایش را به تصویر می کشد. کاربردهایی از قبیل اقیانوس شناسی، پیش بینی حوادث و بلاهای طبیعی مرتبط با دریا، شناسایی توده های ماهی و شناسایی، ردگیری و انهدام اهداف دشمن در کاربردهای نظامی، استفاده از هایدروفون های اسکالر و برداری را ملزم می کند. هایدروفون های اسکالر قادرند تنها فشار موج آکوستیکی را اندازه گیری می کنند. این در حالی است که هایدروفون های برداری قادرند هم فشار و هم سرعت موج آکوستیکی را اندازه بگیرند. مزیت عمده هایدروفون-های برداری نسبت به نوع اسکالر، استفاده بیشتر آنها از اطلاعات سیگنال دریافتی به منظور تخمینی دقیق از جهت سیگنال های وارده می باشد [۱]. به طوری که می توان همزمان زاویه های تعیین موقعیت سه بعدی<sup>۱</sup> اهداف زیر سطحی را تخمین زد.



شکل ۱: آرایه خطی یکنواخت متشکل از  $M$  سنسور و  $D$  سیگنال وارده.

قبل از ظهور هایدروفون های برداری، سیستم های مخابراتی زیر آب بر پایه ی هایدروفون های اسکالر استوار بودند. ولی طی چند دهه ی اخیر، تحقیقات فراوانی بر روی تئوری و طراحی هایدروفون های برداری صورت گرفته است [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]. هایدروفون های برداری قادرند مؤلفه های مهم غیر اسکالر یک میدان آکوستیکی را اندازه گیری کنند و تخمین دقیقی از موقعیت قرارگیری منابع در اختیار بگذارند [۳]. بطوریکه ابهام موجود در تخمین طرفین را در آرایه های یدک شونده متشکل از هایدروفون های اسکالر را برطرف می کنند [۵].

در این مقاله دو نوع کلی از تکنیک های تخمین جهت ورود، از جمله تکنیک های مرسوم<sup>۲</sup> و تکنیک

1-Azimuth & Elevation

2-Conventional

های مبتنی بر زیر فضا<sup>۱</sup> را در مخابرات آکوستیکی زیر آب بررسی کرده و عملکرد هر کدام از زیرمجموعه های این تکنیک ها برای تخمین جهت ورود سیگنال وارد شده به آرایه ای خطی و یکسان از هایدروفن ها شبیه سازی و با هم مقایسه می شوند. الگوریتم های تخمین جهت ورودی که در این مقاله بررسی و با هم مقایسه شده اند عبارتند از: Bartlett, MVDR, MUSIC, Root MUSIC و ESPRIT. در نهایت، نشان داده می شود که تکنیک MUSIC توانایی تفکیک پذیری بهتری در مقایسه با سایر الگوریتم ها دارا می باشد.

در ادامه، جهت دستیابی به خواسته ی فوق، مقاله در بخش ها و زیربخش هایی به صورت مجزا ارائه می شود. در بخش ۲، انواع الگوریتم های تخمین جهت ورود بررسی و روابط ریاضی حاکم بر آنها عنوان می شوند. در بخش ۳، شبیه سازی های انجام گرفته توسط نرم افزار MATLAB، ارائه می شوند. در بخش ۴، نتیجه گیری و جمع بندی صورت گرفته از شبیه سازی های انجام گرفته ارائه می شود. و در نهایت در بخش ۵، مراجع استفاده شده به ترتیب ارجاع لیست شده اند.

## الگوریتم های تخمین جهت ورود

هدف همه تکنیک های تخمین جهت ورود، نمایشی از توان سیگنال آغشته به نویز وارد شده به آرایه ای از هیدروفون های اسکالر یا برداری در جهات مختلف می باشد، به گونه ای که زاویه ورود سیگنال های مطلوب از بین سایر زوایا با دقتی بدون ابهام، متمایز و قابل تشخیص باشد. به عبارتی دیگر توان خروجی آرایه به عنوان تابعی از زاویه ی ورود تخمین زده می شود. به نمایش توان خروجی آرایه در زوایا ی ورود مختلف، طیف فضایی و بعضی مواقع شبه طیف<sup>۲</sup> نیز گفته می شود. پرواضح است، تخمین زاویه ورود با نگاه کردن به نقاط حداکثر یا پیک، در طیف فضایی بدست می آید.

## تکنیک های متداول

روش های تخمین جهت ورود متداول یا مرسوم، مبتنی بر تکنیک های شکل دهی پرتو و هدایت صفر<sup>۳</sup> می باشند و مدل های آماری سیگنال و نویز را استخراج نمی کنند. در این روش ها تکنیک های تخمین جهت ورود، پرتوها را بصورت الکترونیکی در تمامی جهات ممکن هدایت می کنند و به نقاط حداکثر توان خروجی معطوف می شوند.

## الگوریتم Bartlett

این الگوریتم بیان می کند که اگر آرایه بصورت یکسان وزن دهی شده باشد، توان خروجی آرایه را می توان بصورت تابعی از زاویه ی ورود و به شکل زیر نوشت:

$$p_B(\theta) = a^H(\theta) R_{XX} a(\theta)$$

بیانگر ماتریس خودهمبستگی داده ورودی به  $R_{XX}$ ، بیانگر بردار هدایت آرایه  $a(\theta)$ ، که در این رابطه بیانگر عملگر هرمیتین می باشد. اگر تخمینی از ماتریس خودهمبستگی ورودی داشته باشیم و  $H$ ، آرایه های مورد نظر بدانیم، نقاط حداکثر یا پیک های طیف  $\theta$  را برای گستره ی همه  $a(\theta)$  بردارهای هدایت فضایی معادله (۱) تخمین جهات ورود را نشان می دهند

نتایج شبیه سازی نشان می دهد که الگوریتم Bartlett برای سیگنال های وارد شده ای که جدایی زاویه ای<sup>۱</sup> کمتر از ۱۰ درجه دارند دارای تفکیک پذیری<sup>۲</sup> پایینی می باشد. تفکیک پذیری این الگوریتم را می توان با افزودن تعداد هایدروفون های آرایه بهبود بخشید، این کار مستلزم افزایش تعداد دریافت کننده ها می باشد که در نوبه ی خود به حافظه بیشتری برای ذخیره داده ها نیاز داریم.

## الگوریتم MVDR<sup>۳</sup>

الگوریتم Bartlett بر اساس این فرض کار می کرد که قوی ترین پرتو وارد شده در یک جهت خاص، بهترین تخمین را برای توان سیگنال رسیده شده در آن جهت خاص بدست می داد. این الگوریتم برای مواقعی که تنها یک سیگنال به آرایه وارد شود خوب کار می کند. در باقی موارد اگر بیش از یک سیگنال به آرایه وارد شود توان خروجی آرایه در جهت مطلوب شامل توان ناشی از سیگنال در جهت مطلوب و توان ناشی از سیگنال های جهت های نامطلوب می باشد.

الگوریتم MVDR برای بهبود تفکیک پذیری، برعکس الگوریتم Bartlett که همه درجات آزادی را برای شکل دادن پرتو در جهت سیگنال مطلوب در نظر می گرفت، قسمتی از درجات آزادی اش را برای شکل دادن پرتو در راستای سیگنال های مطلوب و همزمان قسمت دیگر را برای هدایت صفر در راستای سیگنال های تداخلی و نامطلوب در نظر می گیرد. این الگوریتم اگرچه بیانگر یک تخمین گر حداکثر تشابه<sup>۴</sup> نمی باشد، ولی می توان آن را الگوریتمی با تخمین بیشترین تشابه از توان ورودی در یک جهت در نظر گرفت، به گونه ای که سیگنال های جهت دیگر را به عنوان تداخل در نظر می گیرد [۷].

1-Angular Separation

2-Resolution

3-Minimum Variance Distortionless Response

4-Maximum Likelihood

هدف این الگوریتم حداکثر کردن نسبت سیگنال به تداخل<sup>۱</sup> می باشد. به گونه ای که سیگنال موردنظر بدون اعوجاج در فاز و دامنه باشد. به منظور حداکثرسازی نسبت سیگنال به تداخل، همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، به هر کدام از سنسورهای آرایه وزن خاصی داده شده است. بردار وزن آرایه،

$$\mathbf{w} = [w_1 w_2 \dots w_M]$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}$$

که در آن  $\mathbf{R}_{XX}^{-1}$  معکوس ماتریس همبستگی وزن دهی نشده از ورودی های آرایه می باشد. با جایگذاری وزن های بدست آمده از معادله (۲) در آرایه شکل ۱، طیف فضایی این الگوریتم را به شکل رابطه زیر بدست می آوریم:

$$P_C(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}$$

با محاسبه و رسم طیف فضایی MVDR، به ازای تمام  $\theta$ ها، جهت های ورود با نگاه به نقاط حداکثر در طیف، تخمین زده می شوند. این الگوریتم اگرچه تفکیک پذیری خیلی بهتری نسبت به الگوریتم Bartlett بدست می-دهد، ولی برای مواقعی که سیگنال های وارده دارای همبستگی زیادی با سیگنال دلخواه باشند، ضعیف عمل می کند. با این توضیح که، این الگوریتم بدون شکل دادن صفر در راستای سیگنال های نامطلوب، و با این امکان که سیگنال های همبسته به صورت مخرب با هم ترکیب شوند، توان خروجی آرایه را کاهش می دهد. از طرفی، این الگوریتم به خاطر محاسبه معکوس یا وارون ماتریس همبستگی، برای آرایه های با ابعاد بزرگ، پیچیدگی محاسباتی زیادی دارد.

### تکنیک های مبتنی بر زیر فضا

اگر چه روش های مرسوم که تاکنون بررسی کردیم دارای گستره کاربرد فراوانی می باشند، ولی از آن جهت که ساختار داده ورودی را استخراج نمی کنند، دارای محدودیت هایی در تفکیک پذیری می باشند. روش های مبتنی بر زیر فضا، تکنیک هایی با قدرت تفکیک بالا می باشند که ساختار ویژه ی ماتریس داده ورودی را استخراج می-کنند.

### الگوریتم MUSIC

این الگوریتم، الگوریتمی با تفکیک پذیری بالا می باشد که ساختاری مبتنی بر استخراج ماتریس کواریانس ورودی دارا می باشد. این الگوریتم اطلاعاتی در مورد پارامترهای مختلف سیگنال از قبیل تعداد سیگنال های ورودی، جهت ورود هر سیگنال، توان و همبستگی متقابل بین سیگنال های مختلف و نویز فراهم می کند. این الگوریتم با فرض اینکه نویز هر کانال ناهمبسته می باشد، ماتریس همبستگی نویز را که ماتریسی قطری

است تشکیل می-دهد. سیگنال های وارده به آرایه گاهی همبسته هستند که منجر به ماتریس همبستگی سیگنال غیرقطری می-شوند. که اگر همبستگی بین سیگنال های ورودی بالا باشد منجر به عملکردی ضعیف در تخمین پارامترهای مطلوب از طریق این الگوریتم می شود.

اگر  $D$  سیگنال به آرایه ای که از  $M$  هیدروفون تشکیل شده باشد وارد شود، بردار داده دریافت شده در خروجی آرایه را می توان بصورت ترکیبی خطی از  $D$  شکل موج ورودی و نویز بیان کنیم و به شکل رابطه زیر بنویسیم:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_0) & \mathbf{a}(\theta_1) & \dots & \mathbf{a}(\theta_{p-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(t) \\ \vdots \\ s_{p-1}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t) \quad (5)$$

که در رابطه ی بالا  $\mathbf{a}(\theta_j)$  بردار هدایت آرایه است که متناظر با جهت ورود سیگنال  $\lambda$ م می باشد. اگر بردار سیگنال های ورودی را با  $\mathbf{s}^T(t) = [s_0(t) \quad s_1(t) \quad \dots \quad s_{p-1}(t)]$  نمایش دهیم و  $A$  را ماتریسی از بردارهای هدایت آرایه در نظر گرفته و برای ساده سازی وابستگی زمانی را کنار بگذاریم، رابطه ی (۵) را می توان به شکل ساده شده زیر نوشت:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (6)$$

ماتریس کواریانس ورودی  $\mathbf{R}_{uu}$ ، را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{R}_{uu} = E[\mathbf{u}\mathbf{u}^H] = \mathbf{A}E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]\mathbf{A}^H + E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_{uu} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (8)$$

در رابطه ی بالا  $\mathbf{R}_{ss}$  ماتریس همبستگی سیگنال می باشد. مقادیر ویژه ماتریس همبستگی  $\mathbf{R}_{uu}$   $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}\}$  توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$|\mathbf{R}_{uu} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (9)$$

اگر  $D$  کوچکتر از  $M$  باشد،  $M-D$  مقدار ویژه ماتریس  $\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H$  برابر صفر هستند و بدین معنی است که  $M-D$  مقدار ویژه ماتریس  $\mathbf{R}_{uu}$  برابر با واریانس نویز،  $\sigma_n^2$ ، می باشند یا به عبارتی دیگر  $\lambda_D, \dots, \lambda_{M-1} = \sigma_n^2$ .  $M-D$  مقدار ویژه فوق با هم برابر بوده و کمترین مقدار را نسبت به سایر مقادیر ویژه دارند که معادل با واریانس نویز هستند. از همین نکته می توان استفاده کرد و تعداد سیگنال های ورودی را تخمین زد. معادل با هر مقدار ویژه، بردار ویژه ای وجود دارد که برای این  $M-D$  مقدار ویژه می توان نوشت:

$$(\mathbf{R}_{uu} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} - \sigma_n^2\mathbf{I})\mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H)\mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (12)$$

با توجه به شرایطی که در مورد ماتریس  $A$  و  $\mathbf{R}_{ss}$  برقرار است، معادله (۱۲) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A}^H\mathbf{q}_i = 0 \quad (13)$$

این بدان معنا می باشد که بردارهای ویژه ی متناظر با M-D تا از کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس همبستگی ورودی، عمود بر بردارهای هدایت آرایه می باشند.

$$\{\mathbf{a}(\theta_0) \dots \mathbf{a}(\theta_{D-1})\} \perp \{\mathbf{q}_D \dots \mathbf{q}_{M-1}\} \quad (14)$$

ماتریس بردارهای ویژه نویز به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\mathbf{V}_n = [\mathbf{q}_D \mathbf{q}_{D+1} \dots \mathbf{q}_{M-1}] \quad (15)$$

از آنجایی که بردارهای هدایت متناظر با مؤلفه های سیگنال، عمود بر بردارهای ویژه زیرفضای نویز می باشند، لذا عبارت  $\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{a}(\theta) = 0$  هنگامی که  $\theta$ ، هنگامی که  $\theta$ ، جهت ورود یکی از سیگنال های وارده باشد برابر با صفر است. از اینرو اگر این عبارت در مخرج کسری که طیف فضایی الگوریتم را بدست می دهد قرار گیرد، با نگاه کردن به نقاط ماکسیمم در طیف فضایی، می توان جهت ورود سیگنال ها را تخمین زد. طیف فضایی الگوریتم MUSIC را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (16)$$

تعامد بین  $\mathbf{a}(\theta)$  و  $\mathbf{V}_n$  باعث می شود که مخرج مینیمم شود و باعث بروز مقادیر حداکثر در محل زاویه های ورود سیگنال در طیف فضایی شود. این مقادیر حداکثر همان تخمین جهت ورود می باشد که توسط الگوریتم MUSIC صورت گرفته است.

### الگوریتم Root MUSIC

جهت افزایش تفکیک پذیری و کاهش پیچیدگی های محاسباتی الگوریتم MUSIC اصلاحات گوناگونی بر روی این الگوریتم صورت گرفته است. یکی از این اصلاحات صورت گرفته، الگوریتم Root MUSIC می باشد. البته این الگوریتم تنها برای آرایه های یکنواخت خطی قابل اعمال است. در این الگوریتم به جای رسم کامل طیف فضایی الگوریتم MUSIC، تنها نقاط حداکثر یا پیک های این الگوریتم که ریشه های یک چندجمله ای می باشند رسم می شوند. اگر آرایه ای خطی و یکنواخت از هایدروفون ها که فاصله بین این هایدروفون ها  $d$  باشد داشته باشیم، بردار هدایت  $\mathbf{m}$  مین هایدروفون به شکل زیر نوشته می شود:

$$a_m(\theta) = \exp\left(j2\pi m \left(\frac{d}{\lambda}\right) \cos\theta\right); \quad m = 1 \dots M \quad (17)$$

طیف فضایی الگوریتم MUSIC که بوسیله رابطه (۱۶) داده شده است را می توان به شکل زیر نوشت:

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{C} \mathbf{a}(\theta)} \quad (18)$$

که در این رابطه  $\mathbf{C} = \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H$  می باشد. باتوجه به معادله ی (۱۷)، مخرج معادله ی (۱۸) را می-توان به شکل زیر نوشت:

$$P_{MUSIC}^{-1}(\theta) = \sum_{l=-M+1}^{M-1} C_l \exp\left(j2\pi l \left(\frac{d}{\lambda}\right) \cos\theta\right) \quad (19)$$

در رابطه بالا  $C_l = \sum_{l=m-n} C_{mn}$  مجموع درایه های قطر ام ماتریس  $C$  می باشد.  $C_{mn}$  درایه سطر  $m$  و ستون  $n$  از ماتریس  $C$  می باشد. با تعریف چندجمله ای  $D(z)$  به صورت زیر:

$$D(z) = \sum_{l=-M+1}^{M-1} C_l z^{-l} \quad (20)$$

طیف فضایی الگوریتم MUSIC در معادله (۱۹) را می توان با تعریف چندجمله ای  $D(z)$  در معادله (۲۰) معادل دانست. با این معادل سازی، هر یک از قطب های  $D(z)$  که در موقعیت  $z = z_1 = |z_1| \exp(j \arg(z_1))$  قرار گرفته شده باشند، معادل با یکی از نقاط حداکثر یا پیک های ظاهر شده در طیف فضایی MUSIC می باشد که به شکل زیر نوشته می شود:

اگر  $|z_1| = 1$  در نظر بگیریم،

$$\cos(\theta) = \left(\frac{\lambda}{2\pi d}\right) \arg(z_1) \quad (21)$$

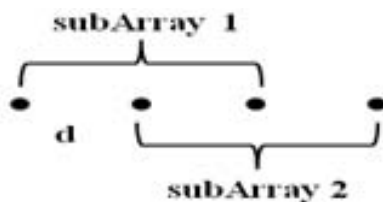
$$\theta = \cos^{-1}\left(\left(\frac{\lambda}{2\pi d}\right) \arg(z_1)\right) \quad (22)$$

که الگوریتم فوق در شرایطی که SNR کمتری داشته باشیم دارای تفکیک پذیری بهتری می باشد.

### الگوریتم 'ESPRIT'

این الگوریتم تجهیزات محاسباتی و ذخیره سازی کمتری نسبت به الگوریتم MUSIC نیاز دارد و برای تخمین جهت ورود نیازی به جستجوی کامل از بین تمام بردارهای هدایت ممکن ندارد. برخلاف MUSIC، ESPRIT نیازی به دانستن دقیق بردارهای هدایت آرایه ندارد. از این رو تجهیزات کالیبره سازی دقیقی برای آرایه هایدروفون ها در این الگوریتم نیاز نداریم.

در این الگوریتم آرایش و چیدمان هایدروفون های آرایه می بایست به نحوی باشد که بتوان آنها را به دو زیرآرایه<sup>۲</sup> به نحوی تقسیم کرد که عناصر متناظر در هر زیر آرایه دارای فاصله نظیر به نظیر یکسانی باشند. زیرآرایه ها نمی بایست موقعیتی چرخشی نسبت به همدیگر داشته باشند. این شرایط برای آرایه خطی یکنواختی از ۴ هایدروفون که فاصله ی بین هایدروفون ها  $d$  باشد در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: تشکیل زیرآرایه برای ULA متشکل از ۴ هایدروفون.

سیگنال وارد شده به هر کدام از زیرآرایه ها را بصورت زیر می توان نوشت:

$$\mathbf{u}_1(k) = [\mathbf{a}_1(\theta_1) \quad \dots \quad \mathbf{a}_1(\theta_D)]. \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(k) \\ \mathbf{s}_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_D(k) \end{bmatrix} + \mathbf{n}_1(k) \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_1(k) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_1(k) \quad (24)$$

به طرز مشابهی برای زیرآرایه ۲ این روابط را می توان به شکل زیر بسط داد:

$$\mathbf{u}_2(k) = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_2(k) \quad (25)$$

$$= \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}_2(k) \quad (26)$$

در این رابطه،  $\boldsymbol{\Phi}$  ماتریس قطری واحدی از شیفت فاز بین هایدروفون های نظیر به نظیر زیرآرایه ها می باشد.

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(k) \\ \mathbf{u}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{s}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(k) \\ \mathbf{n}_2(k) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (28)$$

$$\mathbf{R}_{uu} = \mathbf{E}[\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (29)$$

ماتریس همبستگی معادله بالا، مربوط به کل آرایه می باشد. ماتریس همبستگی هر کدام از زیرآرایه های ۱ و ۲ با روابط زیر بدست می آیند.

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{E}[\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^H] = \mathbf{A}_1\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}_1 + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (30)$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{E}[\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^H] = \mathbf{A}_1\boldsymbol{\Phi}\mathbf{R}_{ss}\boldsymbol{\Phi}^H\mathbf{A}_1 + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (31)$$

در معادلات (۳۰) و (۳۱) اشاره شدند، دارای بردارهای ویژه ای متناظر با  $D$  سیگنال وارد می باشند. زیرفضای سیگنال را برای هر دو زیرآرایه به ترتیب با  $E_1$  برای زیرآرایه ۱ و  $E_2$  برای زیرآرایه ۲ تشکیل می دهیم.  $E_1$  و  $E_2$  ماتریس های با ابعاد  $M \times D$  می باشند که ستون های آنها از  $D$  بردار ویژه متناظر با  $D$  تا از بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس های همبستگی  $R_{11}$  و  $R_{22}$  تشکیل شده اند. با توجه به خاصیت خطی و یکنواخت بودن آرایه، زیرفضاهای  $E_1$  و  $E_2$  را می توان با استفاده از رابطه زیر به هم مرتبط نمود:

$$\mathbf{E}_1\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{E}_2 \quad (32)$$

همچنین می توان ماتریس  $T$  را به گونه ای پیدا کرد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}T \quad (33)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}T \quad (34)$$

با جایگذاری معادلات (۳۲) و (۳۳) در معادله (۳۴) و با این فرض که ماتریس  $A_1$  مرتبه کامل می باشد، به معادله زیر دست پیدا می کنیم:

$$\boldsymbol{\Psi} = T\boldsymbol{\Phi}T^{-1} \quad (35)$$

متناظر با عناصر قطری ماتریس  $\Phi$  می باشند که این عناصر برابر با  $D$ ،  $i = 1, 2, \dots$ ،  $\lambda_i = e^{jkd \cos \theta_i}$  خواهند بود. از طرفی ستون های ماتریس  $T$  بردارهای ویژه ی ماتریس  $\Psi$  هستند.

### نتایج شبیه سازی

الگوریتم های تخمین جهت ورود، برای آرایه ای خطی و یکنواخت از هایدروفون ها، بوسیله ی نرم افزار MATLAB شبیه سازی و با هم مقایسه شده اند. برای این کار، فاصله ی بین هایدروفون ها  $\frac{1}{2}$  و سیگنال های وارده تک-فرکانس در نظر گرفته شده اند.

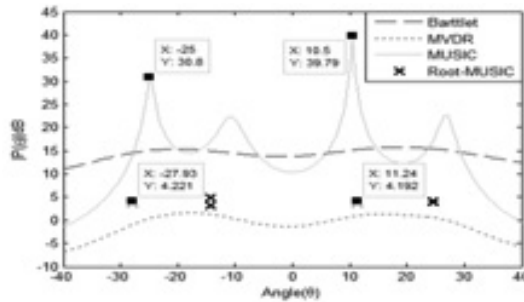
از آنجایی که الگوریتم ESPRIT دارای طیف فضایی نمی باشد، نتایج بدست آمده از شبیه سازی این الگوریتم به طور جداگانه ثبت شده اند. در این مقاله، الگوریتم ها در شرایطی یکسان با هم مقایسه گردیده اند. با ثابت نگه داشتن سایر پارامترها، الگوریتم ESPRIT برای حالت هایی که  $D=2$  و  $D=4$  باشد دارای عملکردی ثبت شده در جدول ۱ می باشد. مشاهده می شود که این الگوریتم به ازای  $D=4$  عملکرد مطلوبی ندارد. این نتیجه با یکسان گرفتن سایر پارامترهای تأثیرگذار مشترک بین الگوریتم های دیگر بدست آمده است. به خاطر عملکرد نامطلوب این الگوریتم، در ادامه این الگوریتم به ازای  $D=2$  بررسی شده است.

جدول ۱: عملکرد الگوریتم ESPRIT به ازای افزایش سیگنال های ورودی.

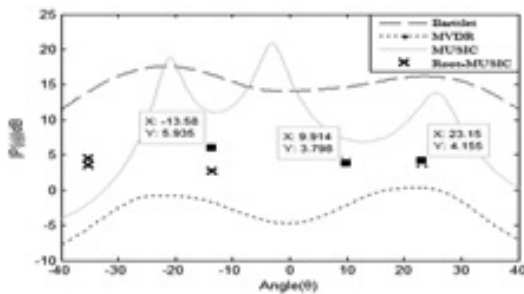
تعداد سیگنال - های ورودی D	زوایای ورود بر حسب درجه $\theta$	زوایای تخمین زده شده بوسیله ی الگوریتم ESPRIT بر حسب درجه $\theta$
2	15	15/59
	45	45/90
4	5	13/52
	25	-10/82
	45	45/48
	65	-71/20

پارامترهای تأثیرگذار بر عملکرد الگوریتم ها که مقایسه عملکرد به ترتیب بر اساس آنها انجام گرفته است عبارتند از: تعداد نمونه های زمانی برداشته شده از سیگنال ها و نویز مشاهده شده، واریانس نویز، ابعاد آرایه یا تعداد هایدروفون های به کاررفته در آرایه و فاصله ی زاویه ای بین منابع صوتی. مقایسه عملکرد با تغییر یکی از پارامترهای تأثیرگذار و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها صورت پذیرفته است. شکل ۳، مقایسه عملکرد الگوریتم های Bartlett, MVDR, MUSIC, Root MUSIC را به ازاء

تغییر نمونه های زمانی و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها به تصویر می کشد. همین مقایسه عملکرد در جدول ۲ برای الگوریتم ESPRIT نمایش داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۳: مقایسه عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود با تغییر تعداد نمونه های زمانی، به ازای  $\theta_1 = -25, \theta_2 = -10, \theta_3 = 10, \theta_4 = 25$  و در شرایطی که  $\sigma_n^2 = 0.5$  و  $M=5$ . (الف)  $K=100$ . (ب) به ازای  $K=10$ .

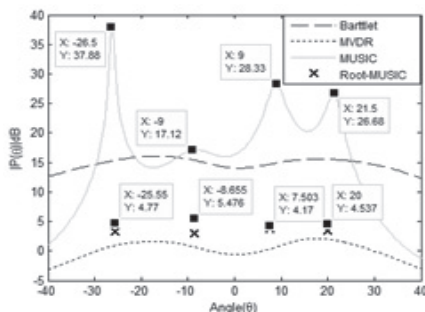
جدول ۲: بررسی عملکرد الگوریتم ESPRIT به ازای تغییر تعداد نمونه های زمانی، در شرایطی که  $M=4$  و  $\sigma_n^2 = 0.5$ .

K=10	
زوایای ورود بر حسب درجه	زوایای تخمین زده شده بوسیله الگوریتم ESPRIT بر حسب درجه
25	28/73
55	66/51
K=100	
25	25/95
55	53/72
K=1000	
25	25/22

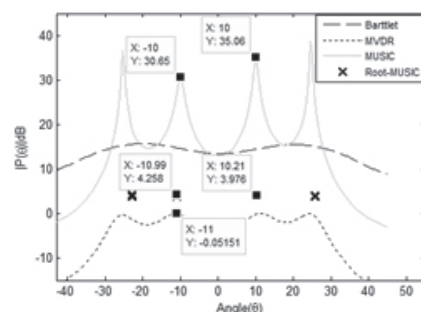
مشاهده می شود که الگوریتم MUSIC و Root MUSIC با کاهش تعداد نمونه های زمانی از ۱۰۰ به ۱۰

عملکرد به نسبت بهتری در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها دارند. با افزایش این تعداد، تفکیک پذیری MUSIC نسبت به Root MUSIC افزایش چشمگیری پیدا می‌کند.

شکل ۴، مقایسه عملکرد الگوریتم‌های Bartlett، MVDR، MUSIC، Root MUSIC را به ازاء تغییر واریانس نویز و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها به تصویر می‌کشد. همین مقایسه عملکرد در جدول ۳ برای الگوریتم ESPRIT نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که الگوریتم‌های MUSIC و Root MUSIC با کاهش واریانس نویز، از 0/05 به ۱، عملکرد بهتری در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها دارند. در شکل ۴ (الف)، مشاهده می‌شود الگوریتم MVDR عملکردی مشابه و نزدیک به Root MUSIC دارد. ولی با افزایش واریانس نویز، از 0/05 به ۱، در شکل ۴ (ب)، مشاهده می‌شود که عملکرد این الگوریتم به طور قابل چشمگیری کاهش پیدا می‌کند. در مجموع مشاهده می‌شود با کاهش واریانس نویز، تفکیک پذیری MUSIC نسبت به Root MUSIC و MVDR افزایش چشمگیری پیدا می‌کند. از طرفی در جدول ۳ مشاهده می‌شود که الگوریتم ESPRIT به ازای  $D=2$  حساسیت کمتری نسبت به تغییر واریانس نویز دارد. شکل ۵، مقایسه عملکرد الگوریتم‌های Bartlett، MVDR، MUSIC، Root MUSIC را به ازاء تغییر ابعاد آرایه و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها به تصویر می‌کشد. همین مقایسه عملکرد در جدول ۴ برای الگوریتم ESPRIT نمایش داده شده است. در شکل ۵ (الف)، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد هایدروفون‌ها، همه الگوریتم‌ها تفکیک پذیری بالایی در تخمین زوایای مطلوب دارند. با بالا رفتن سایز آرایه، درجات چندجمله‌ای معادله (۲۰) که مربوط به الگوریتم Root MUSIC می‌باشد افزایش می‌یابند. لذا افزایش تعداد هایدروفون‌ها باعث تخمین در جهات غیرمطلوب توسط این الگوریتم می‌شود. تا جایی که جهات مطلوب و غیرمطلوب قابل تمیز از هم نمی‌باشند. در شکل ۵ (ب)، مشاهده می‌شود که با کاهش تعداد هایدروفون‌ها، بجز الگوریتم MUSIC سایر الگوریتم‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای تحت تأثیر تغییر سایز آرایه قرار می‌گیرند. در جدول ۴، مشاهده می‌شود که الگوریتم ESPRIT به ازای  $D=2$ ، حساسیت کمی نسبت به تغییر سایز آرایه دارد.



(ب)

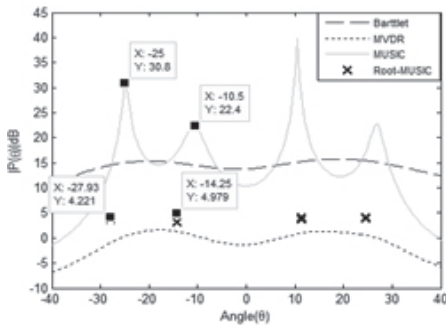


مقایسه عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود برای آرایه های یکنواخت خطی... ۷۷

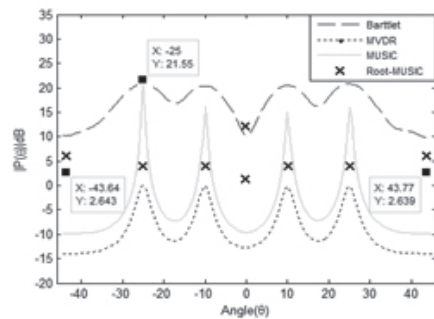
شکل ۴: مقایسه عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود با تغییر واریانس نویز، در شرایطی که زوایای ورود  $\theta_1 = -25, \theta_2 = -10, \theta_3 = 10, \theta_4 = 25$  و  $K=100$  و  $M=5$  (الف) به ازای  $\sigma_n^2 = 0.05$  (ب) به ازای  $\sigma_n^2 = 1$ .

جدول ۳: بررسی عملکرد الگوریتم ESPRIT به ازای تغییر واریانس نویز، در شرایطی که  $K=100$ ،  $M=4$  باشد.

$\sigma_n^2 = 0.05$	
زوایای ورود بر حسب درجه	زوایای تخمین زده شده بوسیله الگوریتم ESPRIT بر حسب درجه
10	10/21
25	25/32
$\sigma_n^2 = 1$	
10	10/60
25	26/43



(ب)



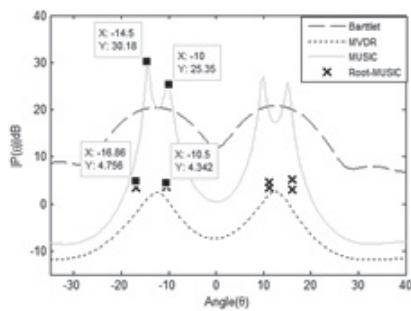
(الف)

شکل ۵: مقایسه عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود با تغییر تعداد هایدروفون های آرایه یا با تغییر ابعاد آرایه، در شرایطی که زوایای ورود  $\theta_1 = -25, \theta_2 = -10, \theta_3 = 10, \theta_4 = 25$  و  $K=100$ ،  $\sigma_n^2 = 0.5$  (ب) به ازای  $M=5$  (الف) باشد.

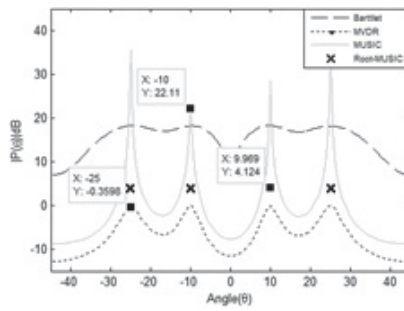
جدول ۴: بررسی عملکرد الگوریتم ESPRIT با تغییر سایز آرایه، در شرایطی که  $\sigma_n^2 = 0.5$  ،  $K=100$  باشد .

M=4	
زوایای ورود بر حسب درجه	زوایای تخمین زده شده بوسیله الگوریتم ESPRIT بر حسب درجه
10	10/96
25	26/80
M=10	
10	10/07
25	24/73
M=15	
10	10/02
25	25/01

شکل ۶، مقایسه عملکرد الگوریتم های Bartlett، MVDR، MUSIC، Root MUSIC را به ازاء تغییر فاصله زاویه ای بین منابع صوتی زیر آب و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها به تصویر می کشد. همین مقایسه عملکرد در جدول ۵ برای الگوریتم ESPRIT نمایش داده شده است. در شکل ۶ (ب) و جدول ۵، مشاهده می شود که با کاهش فاصله زاویه ای، بجز الگوریتم MUSIC، عملکرد همه الگوریتم ها تحت تأثیر قرار می گیرد. در این بین، الگوریتم MUSIC تفکیک پذیری بهتر و حساسیت کمتری نسبت به تغییرات فاصله زاویه ای دارا می باشد.



(ب)



(الف)

شکل ۶: مقایسه عملکرد الگوریتم های تخمین جهت ورود با کاهش یافتن یا افزایش یافتن فاصله ی

زاویه ای بین منابع، در شرایطی که  $K=100$  ،  $M=8$  و  $\sigma_n^2 = 0.5$

(الف) به ازای  $\theta_1 = -25$  ،  $\theta_2 = -10$  ،  $\theta_3 = 10$  ،  $\theta_4 = 25$

(ب) به ازای  $\theta_1 = -15$  ،  $\theta_2 = -10$  ،  $\theta_3 = 10$  ،  $\theta_4 = 15$

جدول ۵: بررسی عملکرد الگوریتم ESPRIT به ازای تغییر فاصله ی زاویه ای بین منابع، در شرایطی که  $\sigma_n^2 = 0.5$ ،  $K=100$  و  $M=4$  باشد.

فاصله ی زاویه ای بین منابع	زوایای ورود بر حسب درجه	زوایای تخمین زده شده بوسیله ی الگوریتم ESPRIT بر حسب درجه
کم	5	3/64
	10	7/54
متوسط	10	10/96
	25	26/80
زیاد	20	19/81
	80	80/41

### نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله الگوریتم های Bartlett، MVDR، MUSIC، Root MUSIC، ESPRIT برای تخمین جهت ورود در آرایه خطی و یکنواخت از هایدروفون ها بررسی شده اند. طبق نتایج شبیه سازی شده، مشاهده می شود که عملکرد همه الگوریتم ها، با تغییر پارامتر های تأثیرگذار از جمله: افزایش تعداد هایدروفون های آرایه، بیشتر کردن تعداد نمونه های زمانی گرفته شده از سیگنال آغشته به نویز مشاهده شده، افزایش فاصله زاویه ای بین منابع و کم شدن واریانس نویز، بهبود پیدا می کند. عملکرد الگوریتم ESPRIT، با افزایش تعداد سیگنال های وارده به آرایه، به ازای افزایش تصاعدی تعداد هایدروفون ها بهبود می یابد. از آنجائیکه، کوچک بودن ابعاد آرایه در اکثر کاربردهای عملی مهم می باشد، در جاهایی که تعداد سیگنال های زیادی به آرایه وارد می شوند، این الگوریتم عملکرد مطلوبی ندارد. تفکیک پذیری و کیفیت عملکرد الگوریتم های Bartlett و MVDR، با تغییرات نامطلوب در پارامترهای تأثیرگذار ذکر شده فوق، به طرز چشم گیری کاهش می یابد. این در صورتی است که الگوریتم MUSIC، حساسیت کمی نسبت به این تغییرات نامطلوب از خود نشان می دهد. در مجموع مشاهده می شود که الگوریتم MUSIC بهترین عملکرد را برخوردار می باشد. الگوریتم Root MUSIC، به ازاء تغییرات نامطلوب در پارامترهای تأثیرگذار، علیرغم سادگی محاسباتی که نسبت به الگوریتم MUSIC دارد، عملکرد به نسبت مطلوبی دارد. با بزرگ شدن ابعاد آرایه، تعداد درجات یا مرتبه چندجمله ای این الگوریتم افزایش می یابد و منجر به ظاهر شدن تخمین هایی در جهات غیرمطلوب می شود، به نحوی که جهات تخمین زده شده مطلوب و غیرمطلوب از هم قابل تمیز نباشند.

## مراجع

- [1] Nehorai, A. and Paldi, E., 1994. "Acoustic Vector Sensor Aarray Processing". *IEEE Trans.Signal Processing*, vol. 42, no. 9, Sep, pp. 2481–2491.
- [2] Shipps, J. C. and Abraham, B. M., 2004. "The Use of Vector Sensors for Underwater Port and Waterway Security". in *Sensors for industry conference, New Orleans, Louisiana, U. S. A, 27-29, Jan*, pp. 41-44.
- [3] Hawkes, M. and Nehorai, A., 1998. "Acoustic Vector Sensor Beamforming and Capon Direction Estimation" *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 2291-2304.
- [4] Hawkes, M. and Nehorai, A., 2001. "Acoustic Vector-Sensor Correlations in Ambient Noise," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 26, No.3, Jul, pp. 337-347.
- [5] Wong, K. T. and Zoltowski, M. D., 2001. "Closed-form Underwater Acoustic Direction-Finding with Arbitrarily Spaced Vector-Hydrophones at Unknown Locations". in *1997 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Hawaii, Hong Kong, Jun*, pp. 2557-2560.
- [6] Abdi, A., Guo, H., and Sutthiwtan, P., 2007. "A New Vector Sensor Receiver for Underwater Acoustic Communication". *Proc. Oceans Conf.*
- [7] Liberti, J. C., Rappaport, T. S., 1999. *Smart Antenna for wireless communications*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.